ÜNİTE I

ÇOKGENLER

1. ÇOKGEN KAVRAMI
2. KONVEKS ÇOKGENIN ÖZELİKLERİ
3. DÖRTGENLER
4. KONVEKS DÖRTGENİN ÖZELİKLERİ
5. YAMUK
6. İKİZKENAR YAMUK
7. DİK YAMUK
8. PARALELKENAR
9. EŞKENAR DÖRTGEN
10. DELTOİD
11. DİKDÖRTGEN
12. KARE

BU BÖLÜMÜN AMAÇLARI

Bu bölümü çalıştığınızda ;

* Çokgenleri tanımlayacak,
* Çokgenlerin temel özeliklerini kavrayacak,
* Çokgenlerde açı kavramını ve çokgenlerin kenarları arasındaki ilişkileri anlayacak,
* Dörtgen çeşitlerini öğreneceksiniz.

NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

Değerli öğrenciler,

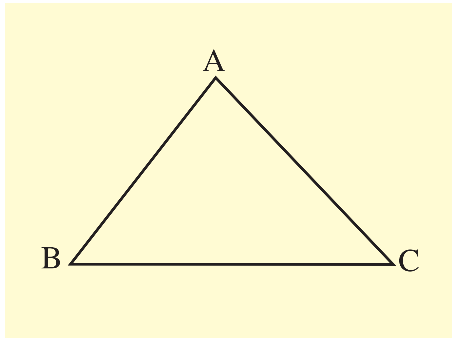
* Verilen tanımları iyi anlayınız. Tanımlar arasındaki ilişkileri kavramaya çalışınız.
* Çözümlü örnekleri çözdükten sonra, kitabı kapatarak tekrar çözmeye çalışınız.
* Konu sonlarındaki araştırma sorularını çözerken, örnek soruların çözüm metotlarını göz önünde tutunuz.

Bu bölümü çalışmadan önce Geometri kitabınızdan aşağıdaki konuları öğrenmelisiniz :

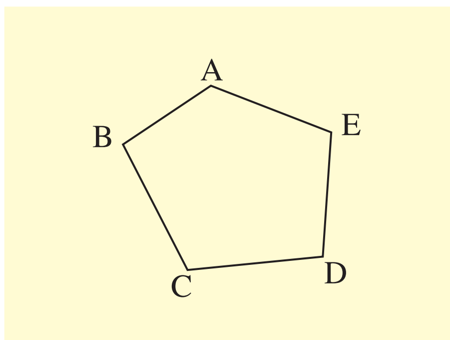
- Açı kavramı
- Üçgende açılar
- Üçgende Kenarotay Bağıntıları
- Üçgende Açıortay Bağıntıları
- Üçgenlerin Eşliği ve Benzerliği

1. ÇOKGEN KAVRAMI

Aynı düzlemde ardışık üç tanesi doğrusal olmayan n tane ($n \geq 3$) nokta $A_1, A_2 \ldots A_n$ olsun. $[A_1 A_2], [A_2 A_3], \ldots [A_n A_1]$ doğru parçalarının kesim noktaları uç noktaları ise $[A_1 A_2] \cup [A_2 A_3] \cup \ldots \cup [A_n A_1]$ kümesine çokgen denir.



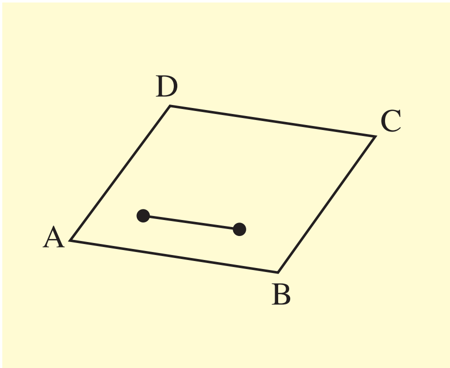
$[AB] \cup [BC] \cup [AC]$ kümesine
ABC üçgeni denir.



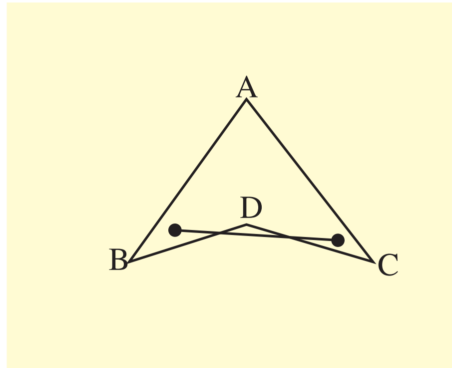
$[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DE] \cup [EA]$ kümesine
ABCDE beşgeni denir.

Çokgenler kenar sayılarına göre isimlendirilir. Kenar sayısı 4 olan, dörtgen; kenar sayısı 5 olan, beşgen; kenar sayısı 6 olan, altıgendir.

Bir çokgenin içinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının tamamı çokgenin içinde kalıyorsa çokgene dışbükey (konveks), doğru parçasının bir kısmı çokgenin dışında kalıyorsa içbükey (konkav) denir.



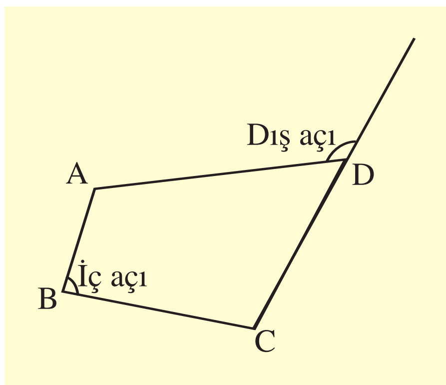
Konveks Dörtgen



Konkav Dörtgen

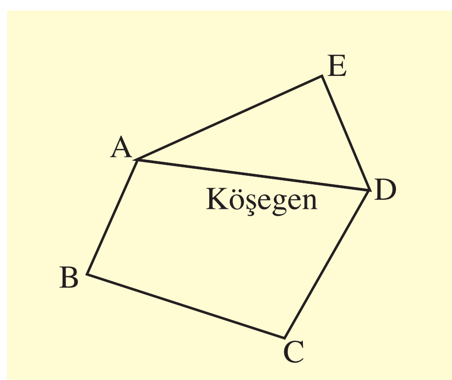
Çokgen denildiği zaman konveks çokgen anlaşılmalıdır.

Çokgenin iç bölgesindeki açılara, çokgenin iç açıları, dış bölgesindeki açılara çokgenin dış açıları denir.



Bir çokgenin ardışık olmayan iki köşesini birleştiren doğru parçalarına çokgenin köşegenleri denir.

[AD] doğru parçası
bu çokgenin bir köşegenidir.



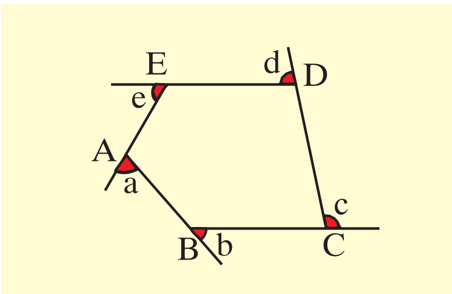
2. KONVEKS ÇOKGENİN ÖZELLİKLERİ

1. Bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, n kenar sayısı olmak üzere

$(n - 2) \cdot 180°$ dir.

İspat : Bir çokgen, herhangi bir köşesinden köşegenleri, yardımıyla en fazla n-2 tane üçgene ayrılır. Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı (n-2) . 180° olur.

2. Bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.



Şekilde, ABCDE beşgeninin dış açıları

a, b, c, d, e dir.

Dolayısıyla

$a + b + c + d + e = 360°$ dir.

3. n kenarlı bir çokgenin köşegen sayısı $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$ dir.

İspat

Doğrusal olmayan n noktadan geçen doğru sayısı C(n,2) dir. Köşegen sayısı C(n,2) -n dir.

Buradan;

$$\frac{n!}{(n-2)!.2!} - n = \frac{n.(n-1)\ (n-2)!}{(n-2)!2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2}$$

$$= \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n.(n-3)}{2} \text{ olur.}$$

4. Kenar uzunlukları eşit olan çokgene düzgün çokgen denir.

a. Düzgün çokgenin iç açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

b. Düzgün çokgenin dış açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

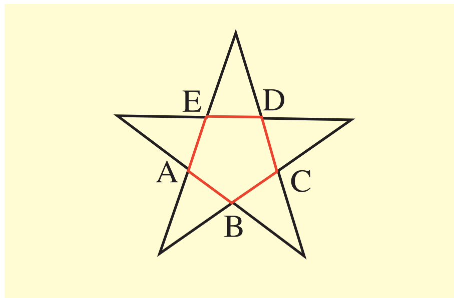
c. n kenarlı bir düzgün çokgende bir iç açının ölçüsü,

$\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$ ve bir dış açının ölçüsü, $\dfrac{360°}{n}$ dir.

5. n kenarlı bir çokgenin belirtilebilmesi için en az *n-2* tanesinin uzunluk ve *n-1* tanesinin açı olması koşulu ile 2n-3 tane elmanın verilmesi gerekir.

6. Dış bükey (konveks) çokgenin kenarları uzatılarak elde edilen çokgene yıldızıl çokgen veya yıldızıl denir. Yıldızıl çokgenin iç açıları ölçüleri toplamı, n kenar sayısı olmak üzere $(n \geq 5)$

$(n - 4) \cdot 180°$ dir.



Örnek

8 kenarlı çokgenin kaç köşegeni vardır?

Çözüm

Köşegen sayısı $\dfrac{8.(8-3)}{2} = \dfrac{8.5}{2} = 20$ dir.

Örnek

Köşegen sayısı kenar sayısının 5 katı olan bir konveks çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı kaç dik açıdır?

Çözüm : Çokgenin kenar sayısı n ise köşegen sayısı $\dfrac{n(n-3)}{2}$ dir.

$\dfrac{n.(n-3)}{2} = 5n$ olmalı.

$\Rightarrow$ $n.(n-3)-10n = 0$

$\Rightarrow$ $n.(n-13) = 0$

$n = 0 \lor n = 13$

n = 0 olmayacağından n = 13 olur.

Bir konveks çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2) \cdot 180°$ dir. 180° dir.

$(13-2) \cdot 180° = 11.180°$

$= 11.2.90°$

$= 22.90°$ olur.

O halde 22 dik açıdır.

Örnek

Köşegen sayısı 54 olan bir düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm

Kenar sayısı n ise $\frac{n.(n-3)}{2} = 54$

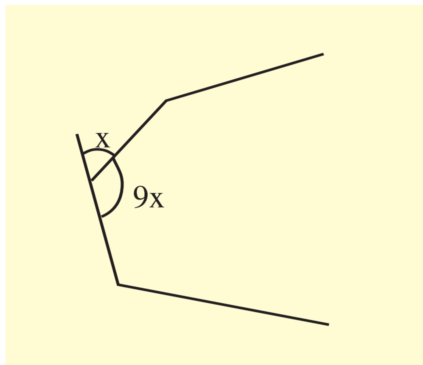
$\Rightarrow$ n. (n-3) = 108

$\Rightarrow$ n. (n-3) = 12.9

n = 12 olur. O halde bir dış açısı $\frac{360}{12} = 30°$ dir.

Örnek

Bir iç açısının ölçüsü, bir dış açısının ölçüsünün 9 katı olan bir düzgün çokgenin kaç köşegeni vardır?



$x + 9x = 180°$ (Doğru açı)

$10x = 180°$

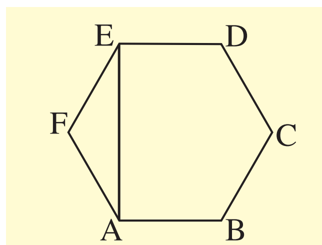
$x = 18°$

$18 = \frac{360°}{n} \Rightarrow n = 20$

Köşegen sayısı $= \frac{20.(20-3)}{2} = \frac{20.17}{2}$

$= 10.17 = 170$ olur.

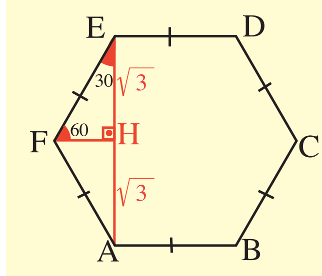
Örnek



Yandaki şekilde ABCDEF düzgün altıgen,

$|AE| = 2\sqrt{3}$ cm olduğuna göre altıgenin bir kenarının uzunluğu kaç cm dir?

Çözüm



Altıgenin bir iç açısının ölçüsü $\frac{(6-2).\ 180°}{6} = 120°$

[FH] ⊥ [AE] dikmesi çizilirse iç açıları 30°, 60°, 90° olan EFH dik üçgeni elde edilir.

$|EH| = |AH| = \sqrt{3}$ cm

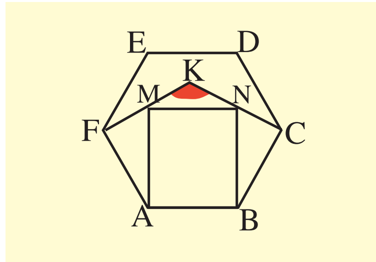
olduğundan $|EF| = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$ cm olur.

Hatırlatma : (60° nin karşısındaki kenar hipotenüsünün yarısının $\sqrt{3}$ katıdır.)

Örnek

Alttaki şekilde, ABCDEF düzgün altıgen, ABNM bir kare olduğuna göre,

m$\widehat{FKC}$ kaç derecedir?



Çözüm

Altıgenin bir iç açısının ölçüsü

$$\frac{(6-2).180°}{6} = \frac{4.180°}{6} = 120°$$

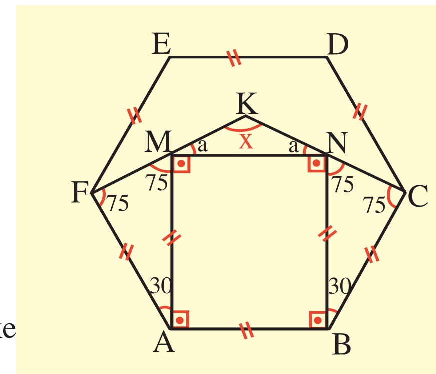
$m(\widehat{MAB}) = 90°$ ve $m(\widehat{FAM}) = 30°$

FAM ikizkenar üçgendir.

Dolayısıyla $m(\widehat{AFM}) = m(\widehat{FMA}) = 75°$

$75° + 90° + a = 180° \Rightarrow a = 15°$

Benzer ispat yöntemi ile BNC üçgeni de ikizkenar üçgen olur. KMN üçgeni ikizkenardır.



Dolayısıyla $m(\widehat{MKN}) = 180° - 2.15° = 150°$ olur.

Örnek

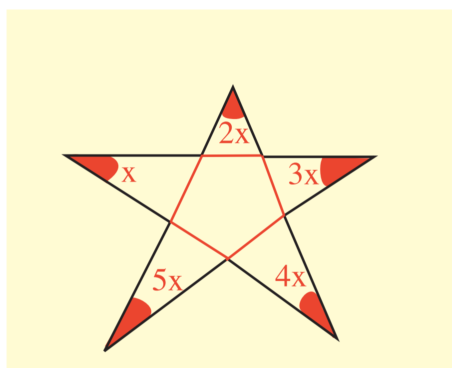
Köşegen sayısı 20 olan bir çokgenin belirtilebilmesi için kaç tane elemanın verilmesi gerekir.

Çözüm

$$\frac{n.\ (n-3)}{2} = 20 \Rightarrow n = 8 \text{ olur.}$$

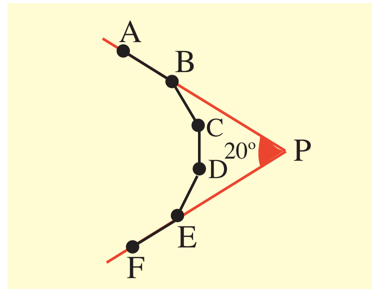
Çokgenin belirtilebilmesi için

2.8 - 3 = 13 elemanın verilmesi gerekir.



Örnek

İç açıları ölçüleri sırası ile x, 2x, 3x, 4x, 5x olan yıldızıl beşgenin en büyük açısı kaç derecedir?



Çözüm

$x + 2x + 3x + 4x + 5x = (5\text{-}4).\ 180°$

$15\ x = 180°$

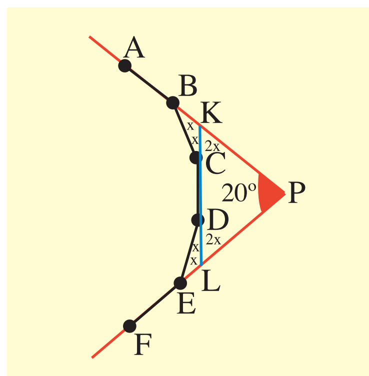
$5x = 60°$ olur.

Örnek

Şekildeki düzgün çokgen kaç kenarlıdır?

Çözüm

[CD] doğrusunu uzatalım. [CD] doğrusu, [AP] yi K noktasında, [FP] yi L noktasında kessin. Düzgün çokgenin bütün dış açılarına x diyelim. Üçgende bir dışaçının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğundan;



$m(L\widehat{K}P) = 2x$ ve $m(K\widehat{L}P) = 2x$ dir.

KLP üçgeninde

$2x+2x+20° = 180°$

$4x = 160°$

$x = 40°$ dir.

Bir düzgün çokgenin bir dış açısı

$\frac{360}{n}$ olduğundan $n = \frac{360}{40} = 9$ olur.

Örnek

Bir köşesinden geçen köşegen sayısı 15 olan bir çokgenin tüm köşegenlerinin sayısı kaçtır?

Çözüm

Bir köşeden geçen tüm köşegen sayısı n - 3 tür.

$n - 3 = 15 \Rightarrow n = 18$ olur.

Tüm köşegenlerin sayısı $\frac{n(n-3)}{2}$ formülünden $\frac{18.15}{2} = 9.15 = 135$ olur.

ARAŞTIRMA SORULARI (1)

1. Bir dış açının ölçüsü bir iç açının ölçüsünün $\frac{1}{4}$ ü olan düzgün konveks çokgen kaç kenarlıdır?

A) 8
B) 9
C) 10
D) 11

2. İç açılarının ölçüleri toplamı 8 dik açıya eşit olan çokgen kaç kenarlıdır?

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8

3. Köşegen sayısı kenar sayısının 4 katı olan çokgen kaç kenarlıdır?

A) 8
B) 9
C) 11
D) 12

4. 65 köşegeni olan bir çokgen, kaç elemanı ile bellidir?

A) 20
B) 21
C) 22
D) 23

5. Bir iç açısının ölçüsü, bir dış açısının ölçüsünün 5 katı olan bir düzgün çokgenin tek olarak belirtilebilmesi için **en az** kaç tane uzunluğunun verilmesi gerekir?

A) 9
B) 10
C) 11
D) 12

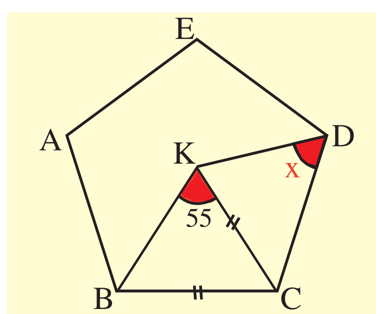
6. İç açılarının ölçüleri toplamı 12 dik açıya eşit olan bir düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 25
B) 30
C) 40
D) 45

7. İki konveks çokgenden birinin kenar sayısı diğerinin iki katıdır. Köşegen sayılarının oranı 1 / 6 ise kenar sayısı fazla olan çokgenin kaç köşegeni vardır?

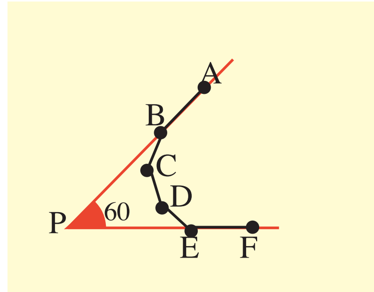
A) 36
B) 42
C) 48
D) 54

8. Şekilde ABCDE düzgün beşgen KBC ikizkenar üçgendir. Buna göre $m(\widehat{CDK})$ kaç derecedir?



A) 71
B) 69
C) 58
D) 49

9. Şekildeki düzgün çokgen kaç kenarlıdır?



A) 8

B) 9

C) 10

D) 12

10. Köşegen sayısı kenar sayısına eşit olan çokgen kaç kenarlıdır?

A) 9

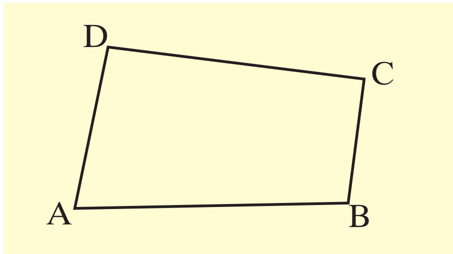
B) 8

C) 6

D) 5

3. DÖRTGENLER

Bir düzlemde, herhangi üçü doğrusal olmayan A, B, C, D noktaları verilsin. [AB], [BC], [CD], [DA] doğru parçalarının birleşim kümesine ABCD dörtgeni denir.

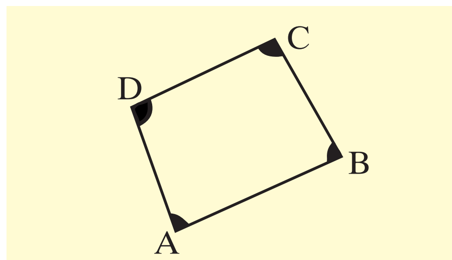


$[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA]$ kümesine ABCD dörtgeni denir.

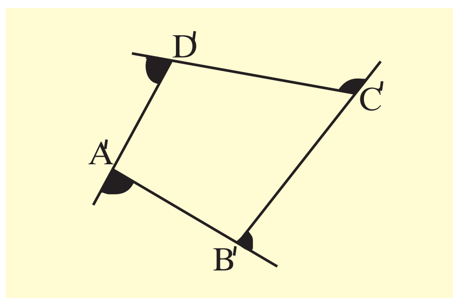
4. KONVEKS DÖRTGENİN ÖZELLİKLERİ

1. Bir konveks dörtgenin iç açılarının ölçülerinin toplamı ve dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360°$



$m(\widehat{A'}) + m(\widehat{B'}) + m(\widehat{C'}) + m(\widehat{D'}) = 360°$

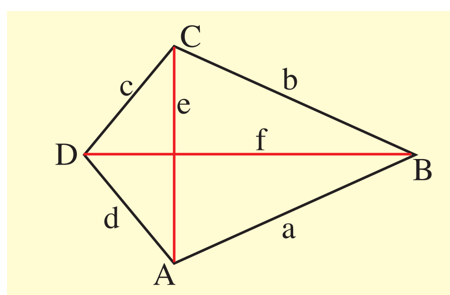


2. Bir konveks dörtgenin iki köşegeni vardır.

Köşegenler

$|AC| = e$ ve

$|BD| = f$ dir.

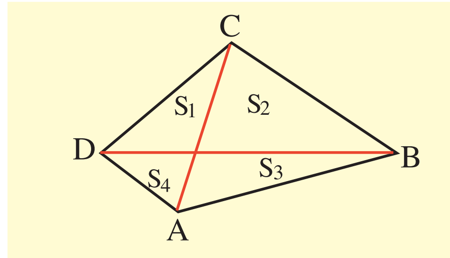


3. Dörtgenin çevresi;

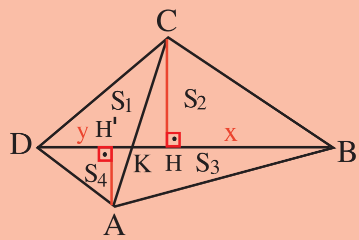
$Ç = a + b + c + d$ dir.

4. Köşegenlerin oluşturduğu karşılıklı alanların çarpımları eşittir.

$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ dir.



İspat



AKD ve AKB üçgenleri ve DKC ile BKC üçgenlerinin yükseklikleri eşittir.

Dolayısıyla,

$$\frac{A(AKD)}{A(AKB)} = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$\frac{A(DKC)}{A(BKC)} = \frac{y}{x} \quad (2)$$

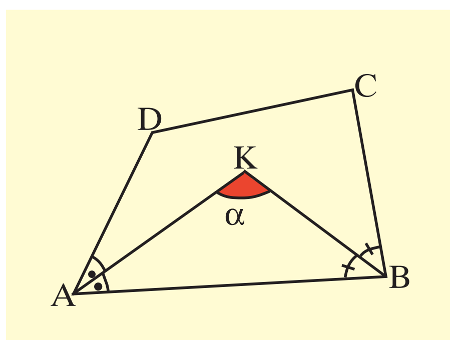
1 ve 2 den

$$\frac{S_4}{S_3} = \frac{S_1}{S_2}$$

$$\Rightarrow \quad S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

5. Ardışık iki açının açıortaylarının oluşturduğu açının ölçüsü diğer iki köşedeki iç açıların ölçülerinin toplamının yarısı kadardır.

$$\alpha = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$$



$$a + b + \alpha = 180°$$

$$\Rightarrow a + b = 180° - \alpha$$

$$2a + 2b + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360°$$

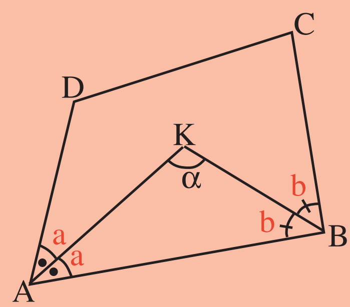
$$2(a+b) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360°$$

$$2(180° - a) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360°$$

$$360° - 2a + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360°$$

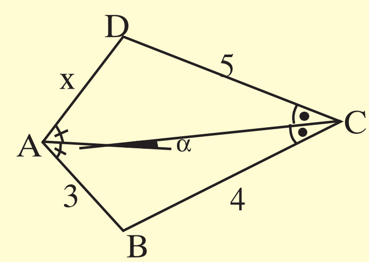
$$2a = m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) \quad \Rightarrow$$

$$a = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$$



6. Karşılıklı iki iç açının açı ortaylarının oluşturduğu dar açının ölçüsü, diğer iki iç açının ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısı kadardır.

$$\alpha = \frac{|m(\widehat{B}) - m(\widehat{D})|}{2}$$



İspat

AKL üçgeninde

$m(\widehat{CLB}) = a + \alpha$ (Dış açı)

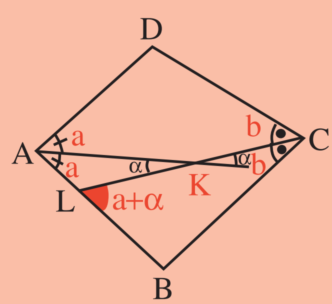
BCL üçgeninde, $a + a + m(\widehat{B}) + b = 180°$ dir.

$\Rightarrow a+b = 180° - (\alpha + m(\widehat{B}))$ (1)

ABCD dörtgeninde

$2a + m(\widehat{B}) + 2b + m(\widehat{D}) = 360°$

$\Rightarrow m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 360° - 2(a+b)$ (2)



1 ve 2 den

$\Rightarrow \; m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 360° - 2[180° - (\alpha + m(\widehat{B}))]$

$\Rightarrow \; m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 360 - 360 + 2\alpha + 2m(\widehat{B})$

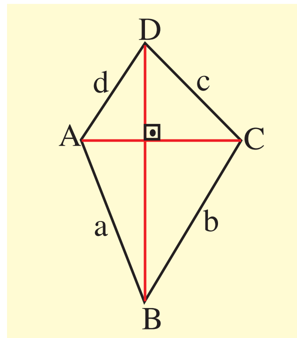
$2\alpha = m(\widehat{D}) - m(\widehat{B})$

$\alpha = \dfrac{|\, m(\widehat{D}) - m(\widehat{B}) \,|}{2}$ veya

$\alpha = \dfrac{|\, m(\widehat{B}) - m(\widehat{D}) \,|}{2}$ olur.

7. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan, köşegenleri dik olarak kesişen bir konveks dörtgenin kenarları arasında

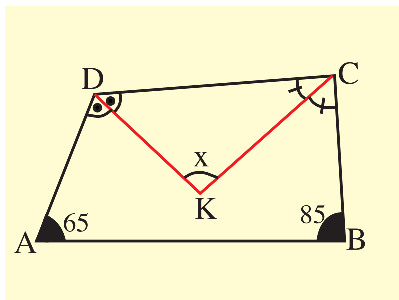
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ bağıntısı vardır.



Örnek

Şekilde verilenlere göre $m(\widehat{DKC})$ kaç derecedir?

Çözüm



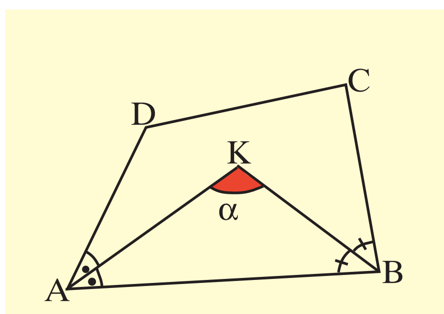
$x = \dfrac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2}$

$x = \dfrac{65+85}{2} = \dfrac{150}{2} \Rightarrow x = 75°$ olur.

Örnek

Şekilde verilenlere göre x uzunluğu kaç birimdir?

Çözüm



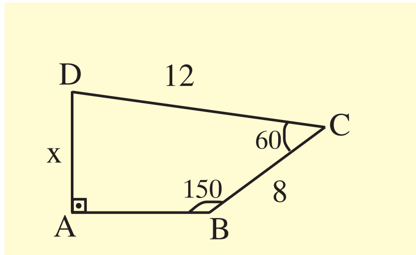
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ olduğundan

$3^2 + 5^2 = 4^2 + x^2$

$\Rightarrow x = 3\sqrt{2}$ olur.

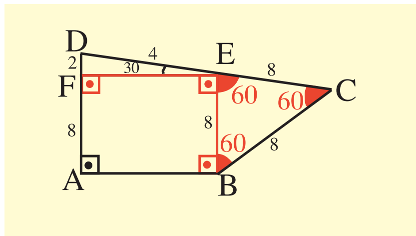
Örnek

Şekilde verilenlere göre x uzunluğu kaç cm dir?



Çözüm

I. yol



[EB] ⊥ [AB] çizelim. $m(\widehat{EBC}) = 60°$ dir. Dolayısıyla $m(\widehat{BEC}) = 60°$ olur. Buradan EBC eşkenar üçgen olur. $|EB| = 8$ cm, $|DE| = 4$ cm dir. [EF] ⊥ [AD] çizelim. Dikdörtgen özeliğinden $|AF| = 8$ cm dir. FDE dik üçgeninde $m(\widehat{DEF}) = 30°$ olur.

$|FD| = \frac{1}{2} . 4 = 2$ cm (30° nin karşısındaki kenar)

Dolayısıyla $|AD| = 2 + 8 = 10$ cm olur.

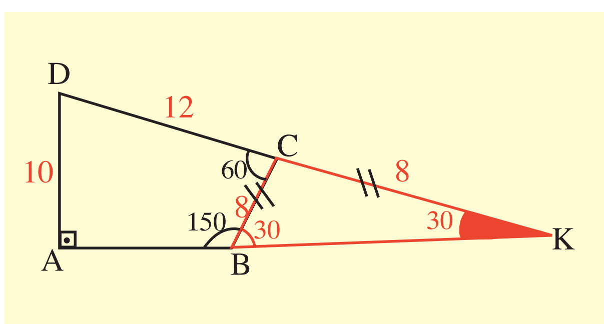
II. yol

Ya da verilen şekli yanda olduğu gibi tamamlayalım. BCK ikizkenar üçgen olur.

$|BC| = |CK| = 8$ cm dir.

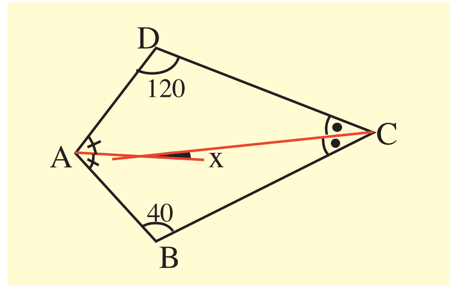
DAK dik üçgeninde $|DK| = 20$ cm olduğundan

$|AD| = 10$ cm olur. (30° nin karşısındaki kenar)



ARAŞTIRMA SORULARI (2)

1. Şekilde verilenlere göre x dar açısı kaç derecedir?



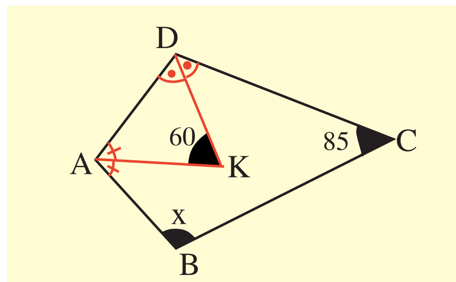
A) 15°

B) 35°

C) 30°

D) 40°

2. Şekilde verilenlere göre x açısı kaç derecedir?



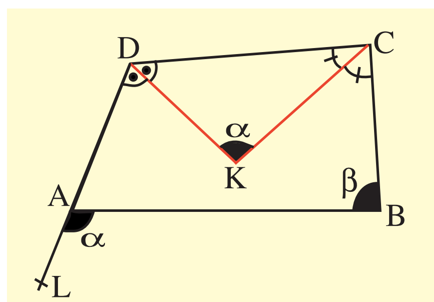
A) 30°

B) 35°

C) 40°

D) 45°

3.



$m(\widehat{DKC}) = m(\widehat{BAL}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CBA}) = \beta$

ise α açısının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

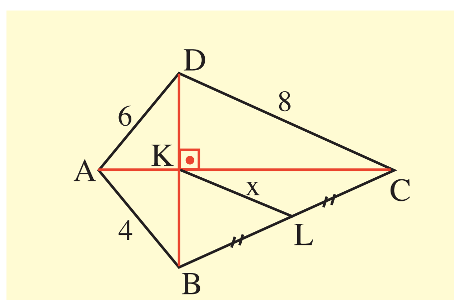
A) $25° + \frac{\beta}{3}$

B) $30° + \frac{\beta}{3}$

B) $45° + \frac{\beta}{3}$

D) $60° + \frac{\beta}{3}$

4. Şekilde verilenlere göre |KL| kaç cm dir.



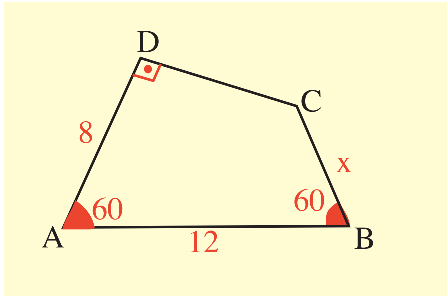
A) $\sqrt{11}$

B) $2\sqrt{11}$

C) $\sqrt{7}$

D) $2\sqrt{7}$

5. Şekilde verilenlere göre x uzunluğu kaç cm dir?



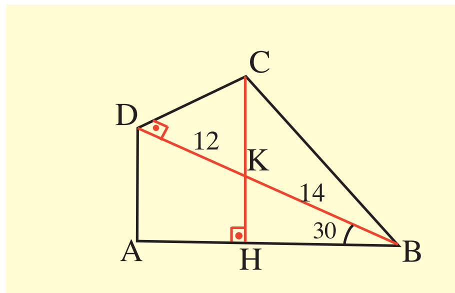
A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

6. Şekildeki |DK| = 12 cm, |KB| = 14 cm ise |CH| kaç cm dir?



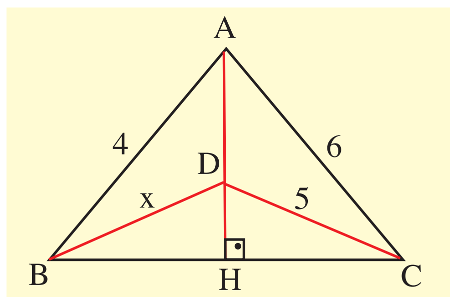
A) 23

B) 28

C) 29

D) 31

7. Şekildeki ABC üçgeninde, [AH] ⊥ [BC] dir. |AB| = 4cm, |AC| = 6cm, |CD| = 5cm ise |BD| = x kaç cm dir?



A) $\sqrt{2}$

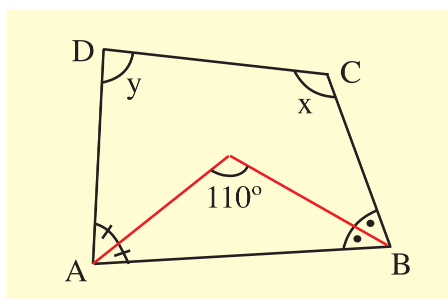
B) $\sqrt{3}$

C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$

8.

Şekildeki ABCD dörtgeninde, $m(\widehat{ADC}) = y$, $m(\widehat{BCD}) = x$, $m(\widehat{AEB}) = 110°$ dir. [AE] ve [BE] açıortay, x-y = 20° ise y kaç derecedir?



A) 100

B) 90

C) 80

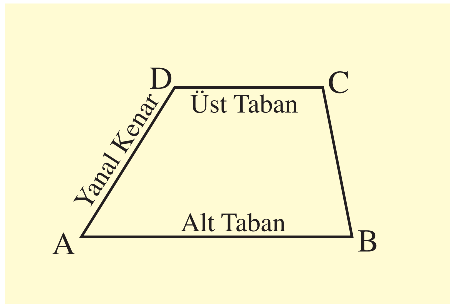
D) 70

5. YAMUK

Yalnız iki kenarı paralel olan dötgene, yamuk denir.

Yamuğun paralel olan kenarlarına, yamuğun tabanları, parelel olmayan kenarlarına yanal kenarlar denir.

[AB] // [DC]

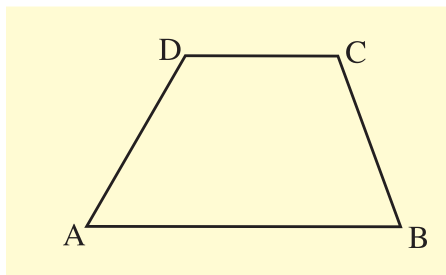


YAMUĞUN ÖZELLİKLERİ

1. Yamuğun, yanal kenarları üzerindeki açılar bütünlerdir.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180°$

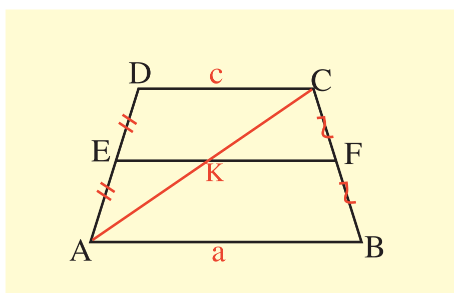
$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$



2. Yan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına, orta taban denir.

Orta taban uzunluğu, alt ve üst tabanlarının uzunluklarının toplamının yarısı kadardır.

$|EF| = \frac{a + c}{2}$



İspat

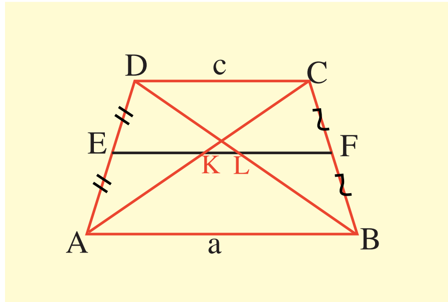
$|KF| = \frac{a}{2}$ (ABC üçgeninde, orta taban uzunluğu)

$|EK| = \frac{c}{2}$ (ACD üçgeninde, orta taban uzunluğu)

$\Rightarrow |EF| = |EK| + |KF| = \frac{c}{2} + \frac{a}{2} = \frac{c+a}{2}$ olur.

3. Yamuğun köşegenleri, orta tabanı K ve L noktalarında kesmiş olsun. Bu durumda,

$|KL| = \frac{a - c}{2}$ olur.



İspat

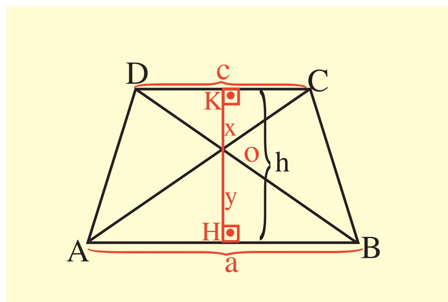
$|KL| = |EL| - |EK|$ dır.

$|EL| = \frac{a}{2}$ (ABD üçgeninde orta taban uzunluğu)

$|EK| = \frac{c}{2}$ (ACD üçgeninde orta taban uzunluğu)

$\Rightarrow |KL| = \frac{a - c}{2}$ olur.

4. $|OK| = x$, $|OH| = y$ ise, $\frac{x}{y} = \frac{c}{a}$ dır.



İspat

$\overset{\Delta}{DOC} \sim \overset{\Delta}{BOA}$ dir. (A.A.A)

$y = h - x$ olduğundan

$\Rightarrow \frac{x}{h - x} = \frac{c}{a} \Rightarrow ax = hc - cx \Rightarrow ax + cx = hc$

$\Rightarrow x = \frac{hc}{a + c}$ .... (1)

$\Rightarrow y = h - x$

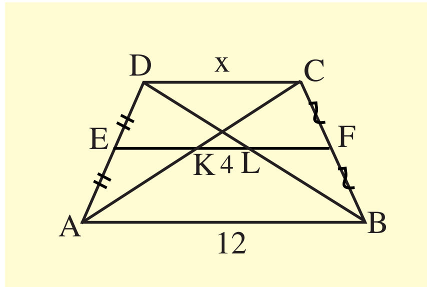
$\Rightarrow y = h - \frac{hc}{a + c} = \frac{ah + hc - hc}{a + c} = \frac{ah}{a + c}$ ... (2)

$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\frac{hc}{a + c}}{\frac{ah}{a + c}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{c}{a}$ olur.

Örnek

Şekilde, ABCD yamuk, E ve F ait oldukları kenarların orta noktalarıdır. |AB| = 12cm, |KL| = 4 cm ise |DC| = x uzunluğu kaç cm dir?

Çözüm



$|KL| = \frac{a-c}{2}$ olduğundan

$4 = \frac{12-x}{2}$

$8 = 12-x$

$x = 4$ cm olur.

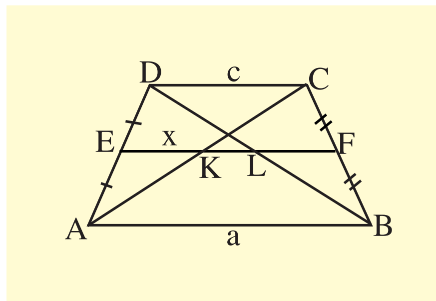
Örnek

ABCD bir yamuk, |EF| orta tabandır.

$a + c = 13$

$a - c = 5$ ise,

$|EK| = x$ kaç cm dir?



Çözüm

$\left.\begin{array}{l} a + c = 13 \\ a - c = 5 \end{array}\right\}$ taraf tarafa çıkarırsak $2c = 8$ den,

$\Rightarrow c = 4$ cm dir.

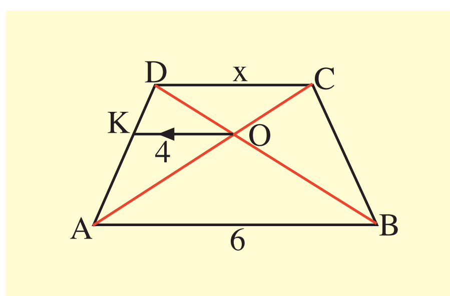
$|EK| = x = \frac{c}{2} = \frac{4}{2} = 2$ cm olur.

Örnek

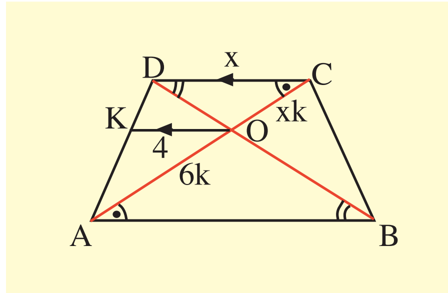
Yandaki şekilde ABCD bir yamuk,

OK//AB, |AB| = 6 cm, |OK| = 4 cm ise,

|DC| kaç cm dir?



Çözüm



$\overset{\Delta}{DOC} \sim \overset{\Delta}{BOA}$ (A.A)

$|OC| = xk$, $|OA| = 6k$ olur.

$\overset{\Delta}{AKO} \sim \overset{\Delta}{ADC}$ (A.A)

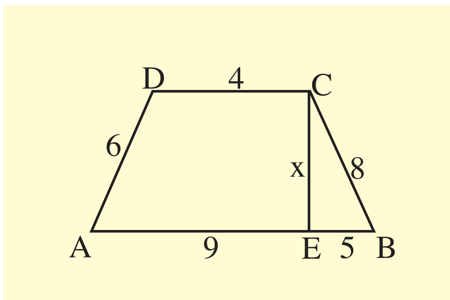
$\Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{6k}{(6+x)k}$

$\Rightarrow 3x = 12+2x$

$\Rightarrow x = 12$ bulunur.

Örnek

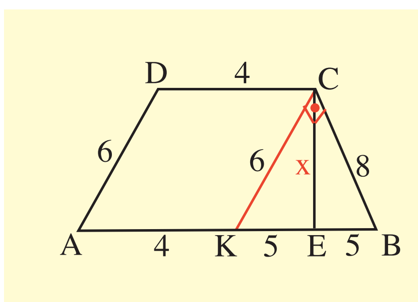
Yandaki şekilde, ABCD bir yamuk ise, verilenlere göre, x uzunluğu kaç cm dir?



Çözüm

[CK] // [DA] çizelim. $|AK| = |DC| = 4$ cm ve $|KE| = 9 - 4 = 5$ cm. olur

$|CK| = |AD| = 6$ cm dir.



$|KB|^2 = |CK|^2 + |CB|^2$ olduğundan CKB üçgeni, dik üçgendir.

[CE], CKB dik üçgeninde, hipotenüse ait kenarortaydır.

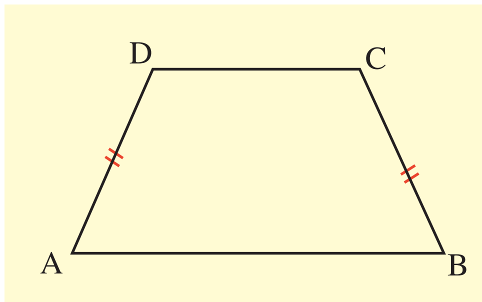
Yani, $|CE| = |KE| = |EB| = 5$ cm dir.

6. İKİZKENAR YAMUK

Paralel olmayan kenarları eş olan yamuğa ikizkenar yamuk denir.

İKİZKENAR YAMUĞUN ÖZELLİKLERİ

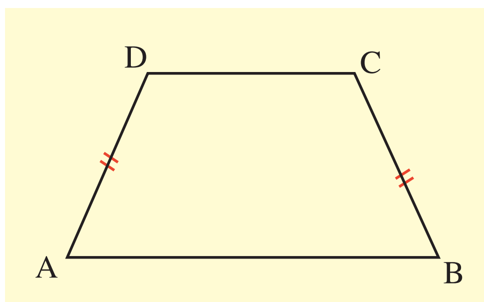
1. İkizkenar yamukta taban açıları eşittir.



$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{D})$

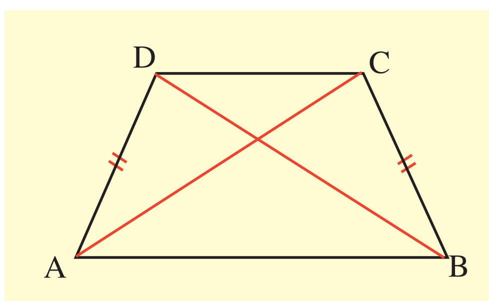
2. Karşılıklı açıların ölçüleri toplamı 180° dir.



$m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180°$

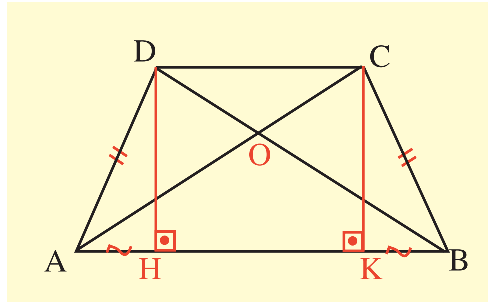
$m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180°$

3. İkizkenar yamukta köşegen uzunlukları birbirine eşittir. $|AC| = |BD|$



4. $|AH| = |KB| = \dfrac{a - c}{2}$

ve $ADH \cong BCK$

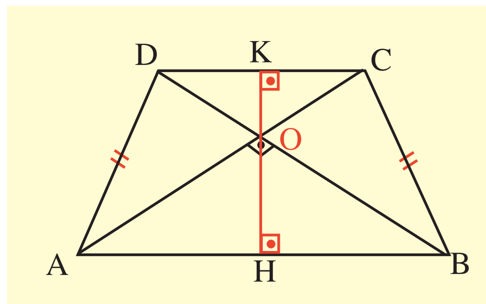


5. İkizkenar yamukta, köşegenler birbirine dik ise.

a) $|OK| = \dfrac{c}{2}$

$|OH| = \dfrac{a}{2}$ (Dik üçgende hipotenüse

$|KH| = h = \dfrac{a + c}{2}$ olur.



b) Bir köşegenin uzunluğu $|AC| = |BD| = \dfrac{a + c}{2} \cdot \sqrt{2}$ dir.

İspat

DOC ikizkenar dik üçgeninde

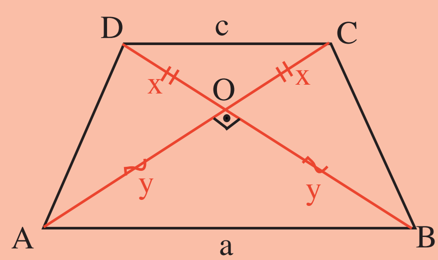
$2x^2 = c^2 \Rightarrow x = \dfrac{c\sqrt{2}}{2}$

AOB ikizkenar dik üçgeninde

$2y^2 = a^2 \Rightarrow y = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow |AC| = |BD| = x + y$

$\Rightarrow |AC| = |BD| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} + \dfrac{c\sqrt{2}}{2} = \left(\dfrac{a + c}{2}\right) \cdot \sqrt{2}$ olur.



6. İkizkenar yamukta köşegenler yanal kenara dik ise,

$$h = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2} \text{ dir.}$$

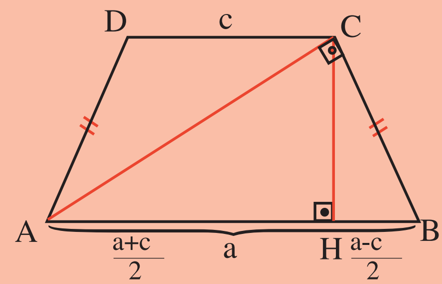
İspat

$|HB| = \frac{a - c}{2}$, $|AH| = a - \frac{a - c}{2} = \frac{a + c}{2}$ dir.

ABC dik üçgeninde Öklid yükseklik bağıntısı yazılırsa,

$h^2 = (\frac{a + c}{2}) \cdot (\frac{a - c}{2}) = \frac{a^2 - c^2}{2}$ ise

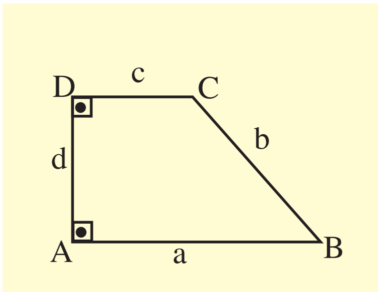
$h = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}$ bulunur.



7. DİK YAMUK

Yanal kenarlarından biri dik olan yamuğa, dik yamuk denir.

DİK YAMUĞUN ÖZELLİKLERİ



1. Dik yamuğun yüksekliği dik kenara eşittir. Yani $h = d$ dir.

2. Köşegenleri, dik olarak kesişen dik yamukta, $h^2 = a \cdot c$ bağıntısı vardır.

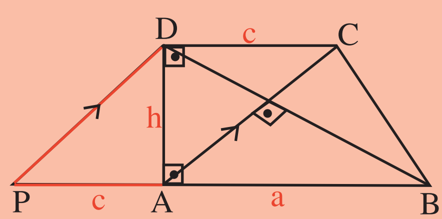
İspat

[AB] kenarını uzatıp, [AC] // [DP] çizelim.

[AC] ⊥[DB] olduğundan,

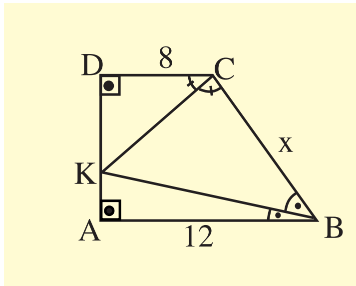
Öklid bağıntısına göre,

DPB dik üçgeninde $\mathbf{h^2 = a \cdot c}$ olur.

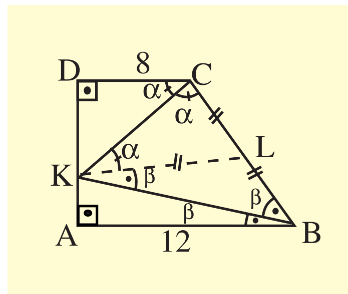


Örnek

Şekilde, ABCD dik yamuk, [CK] ve [BK] açıortaylardır. |AB| = 12 cm ve |DC| = 8 cm ise, |BC| kaç cm dir?



Çözüm



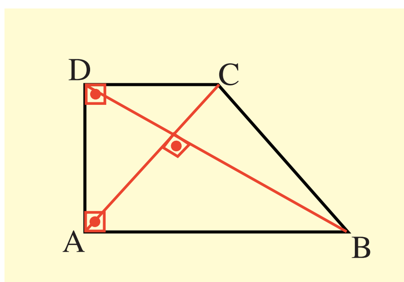
K noktasından [AB] doğru parçasına [KL] paralel doğrusunu çizelim. $m(\widehat{DCK}) = m(\widehat{CKL})$ (içters açılar) olduğundan |KL| = |CL| dir. Yine $m(\widehat{LKB}) = m(\widehat{ABK})$ (içters açılar) olduğundan |KL| = |LB| dir.
Buradan |CL| = |LB| eşitliği elde edilir. O hâlde, [KL], dik yamuğun orta tabanıdır.

$|KL| = \dfrac{12+8}{2} = 10$ dur.

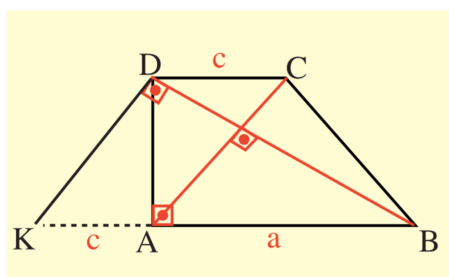
|BC| = 2|KL| olduğundan |BC| = 2.10 = 20 cm bulunur.

Örnek

Şekilde ABCD yamuk, [AC] ⊥[BD], |AC| = 8cm, |BD| = 15 cm ise, a+c kaçtır?



Çözüm



[DK] // [AC] çizelim. KA| = |CD| = a, |DK| = |AC| = 8 cm ve [DK] ⊥[DB] dir.

KDB dik üçgeninde Pisagor bağıntısı yazarsak, $(a+c)^2 = 8^2 + 15^2 = a+c = 17$ cm olur.

Örnek

Köşegenleri, dik kesişen dik yamukta, tabanlar 9 cm ve 4 cm ise, yamuğun çevresi kaç cm dir?

Çözüm

$[CH] \perp [AB]$ çizelim.

$d^2 = 4 \,.\, 9 = 36$

$d = 6 \Rightarrow |CH| = 6$ cm olur.

$|AH| = |DC| = 4$ cm dolayısıyla,

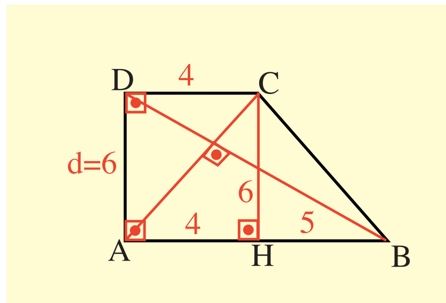
$|HB| = 5$ cm dir.

BHC dik üçgeninde,

$|CB|^2 = 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$

$Ç = a + b + c + d$

$Ç = 9 + \sqrt{61} + 4 + 6 = 19 + \sqrt{61}$ cm olur.



Örnek

Taban uzunlukları 8 cm ve 6 cm olan ikizkenar yamuğun köşegenleri birbirine diktir. Buna göre yamuğun yüksekliği kaç cm dir?

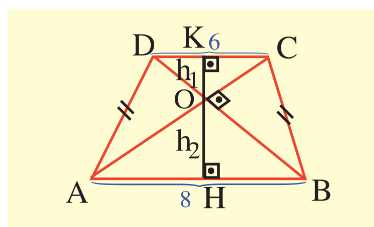
Çözüm

$h_1 = \frac{6}{2} = 3$ (DOC dik üçgeninde kenarortay uzunluğu)

$h_2 = \frac{8}{2} = 4$ cm (AOB dik üçgeninde kenarortay uzunulğu)

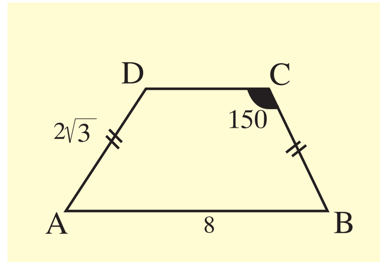
$h = h_1 + h_2$ olduğundan,

$\Rightarrow h = 4 + 3 = 7$ cm olur.



Örnek

Şekilde verilen yamuğun |DC| uzunluğu nedir?



Çözüm

C ve D noktalarından [DH] ve [CK] dikmeleri çizelim. ABCD ikizkenar yamuk olduğundan,

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$ (Taban açılar)

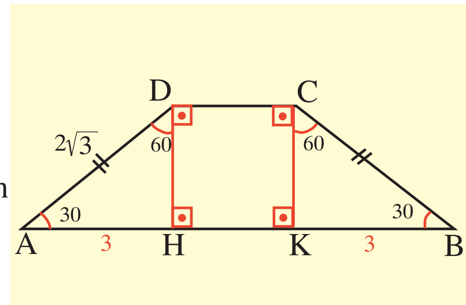
$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ (Karşı durumlu açılar)

$\Rightarrow m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = 30°$ olur.

AHD dik üçgeninde $|AD| = 2\sqrt{3}$ ise $|AH| = 3$ cm

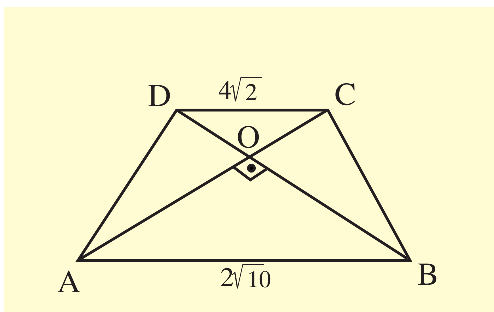
$|AH| = |KB| = 3$ cm ve $|DH| = \sqrt{3}$ cm dir.

$|HK| = 8 - (3+3) = 2$ cm dir.

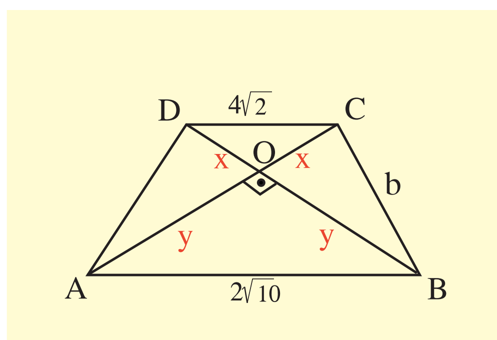


Örnek

Şekildeki ikizkenar yamukta, köşegenler dik olarak kesişiyor. Buna göre |BC| kaç cm dir?



Çözüm



ODC dik üçgeninde,

$2x^2 = 16 \,.\, 2$

$x^2 = 16$ .... (1)

AOB dik üçgeninde,

$2y^2 = 4.10$

$y^2 = 20$......... (2)

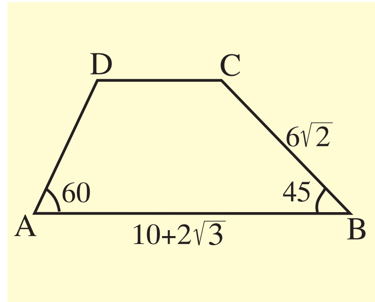
BOC dik üçgeninde,

$b^2 = x^2 + y^2 = 16 + 20 = 36$

$b = 6$ cm olur.

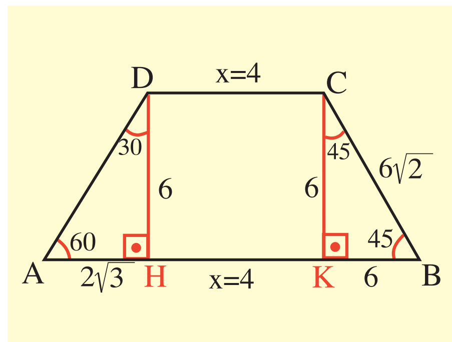
Örnek

Şekildeki ABCD yamuğunda, $|AB| = 10 + 2\sqrt{3}$ cm, $|BC| = 6\sqrt{2}$ cm dir. $m(\widehat{A}) = 60°$ ve $m(\widehat{B}) = 45°$ ise $|CD| = c$ uzunluğu kaç cm dir?



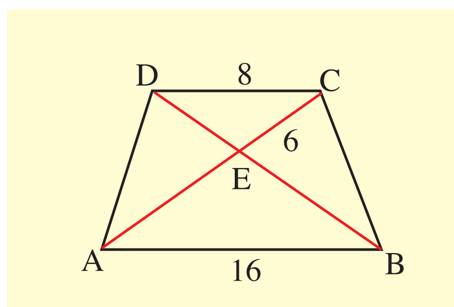
Çözüm

$[DH] \perp [AB]$ ve $[CK] \perp [AB]$ çizelim.
KBC ikizkenar dik üçgendir.
$|BC| = 6\sqrt{2}$ cm ise $|KB| = |KC| = 6$ cm olur.
AHD dik üçgeninde,
$|AH| = 2\sqrt{3}$ cm olur. (30°, 60°, 90°)
$|HK| = x$ dersek;
$|AB| = |AH| + |HK| + |KB|$ olduğundan
$10 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + x + 6$



Örnek

Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğunda, $|AB| = 16$ cm, $|DC| = 8$cm ve $|EC| = 6$ cm olduğuna göre ABCD yamuğunun yüksekliği kaç cm dir?

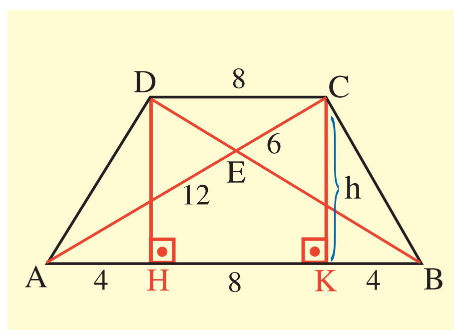


Çözüm

$\overset{\Delta}{DEC} \sim \overset{\Delta}{BEA}$ (A.A.)

$$\frac{8}{16} = \frac{6}{|AE|}$$

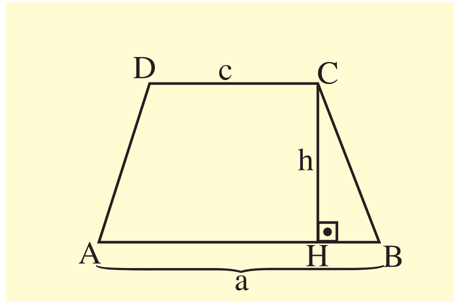
$|AE| = 12$ dir.
[DH] ve [CK] dikmelerini çizelim.
$|DC| = |HK| = 8$ cm ve $|AH| = |KB| = 4$ cm di
ACK dik üçgeninde Pisagor bağıntısı yazalı



$|AK|^2 + |KC|^2 = |AC|^2$
$12^2 + h^2 = 18^2 \Rightarrow h^2 = 324 - 144$
$h^2 = 180 \Rightarrow h = 6\sqrt{5}$ bulunur.

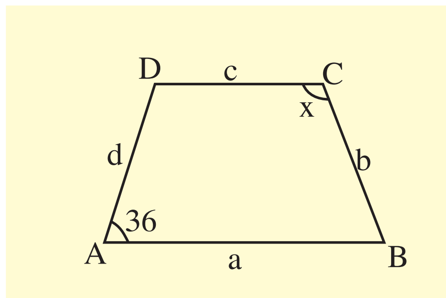
ARAŞTIRMA SORULARI (3)

1. ABCD bir yamuk, |AB| = a, |CD| = c, |CH| = h, a - c = 4 ve A(ABCD) = 6h ise |DC| = c uzunluğu kaç cm dir?



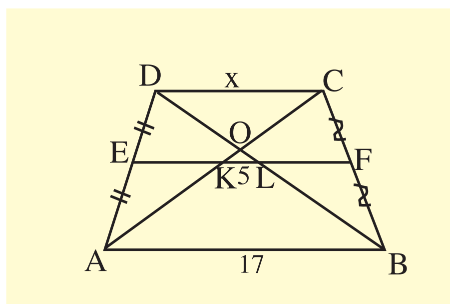
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5

2. ABCD bir yamuk, a = d + c ve $m(\widehat{A}) = 36°$



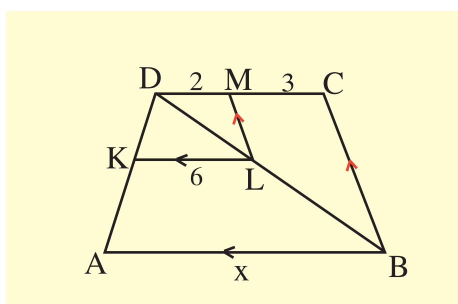
A) 80
B) 92
C) 96
D) 108

3. ABCD yamuğunda EF orta taban, |KL| = 5 cm, |AB| = 17 cm ise |DC| kaç cm dir?



A) 6
B) 7
C) 8
D) 9

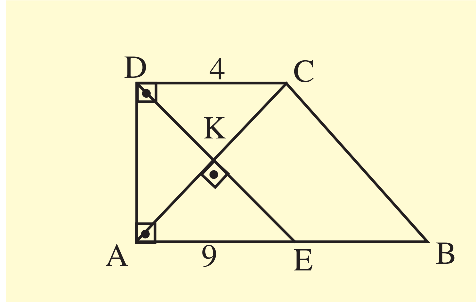
4. ABCD bir yamuk, [KL]//[AB], [ML]/[BC] ise |AB| kaç cm dir?



A) 9
B) 10
C) 12
D) 15

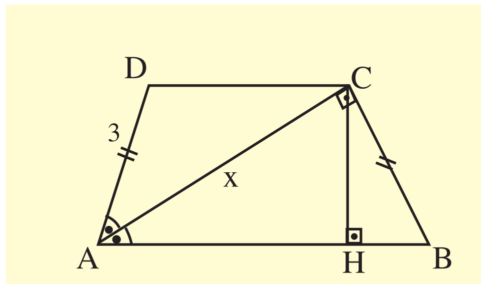
5. ABCD dik yamuk, [DE] ⊥ [BC], |AE| = 9 cm, ve |DC| = 4 cm ise AD nedir?

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9



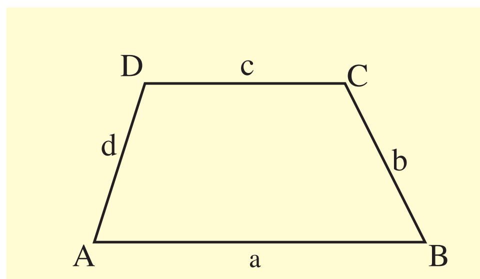
6. ABCD ikizkenar yamuk [AC]⊥[BC] ve [AC] açıortay ise |AC| kaç cm dir?

A) $2\sqrt{3}$
B) $3\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$



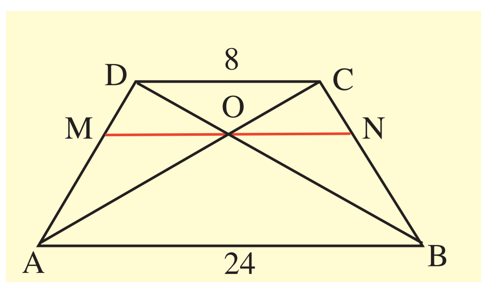
7. ABCD bir yamuk ve kenarları arasında $(a + c)^2 - (b + d)^2 = 300$ bağıntısı vardır. Yamuğun çevresi 30 cm ise yamuğun orta taban uzunluğu kaç cm dir.

A) 8
B) 10
C) 15
D) 20



8. Şekildeki ABCD yamuğunda, köşegenlerin kesim noktasından tabanlara çizilen paralel doğru, [AD] doğru parçasını M, [BC] doğru parçasını N noktasında kesiyor. |AB| = 24 cm, |DC| = 8 cm ise |MN| uzunluğu kaç cm dir?

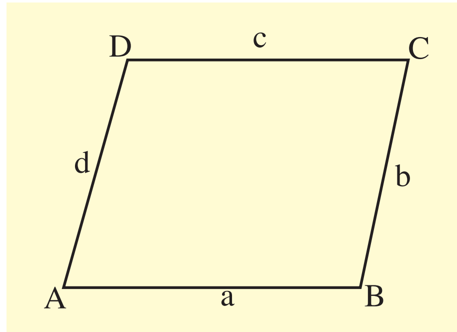
A) 6
B) 8
C) 10
D) 12



8. PARALELKENAR

Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgene, parelelkanar denir.

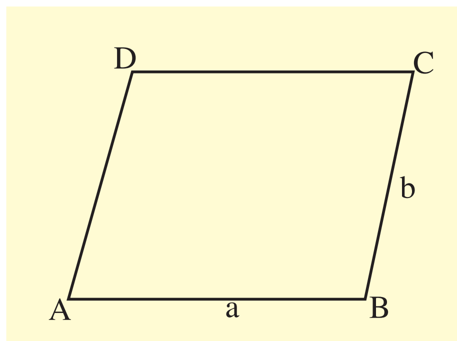
[AB]//[DC] ve [AD]//[BC] dir.



PARALELKENARIN ÖZELLİKLERİ

1. Paralelkenarın karşılıklı açıları eşittir.

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$ dir.



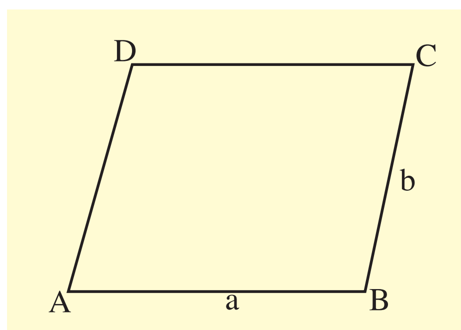
2. Paralelkenarda ardışık iki açının toplamı 180° dir.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180°$

$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$

$m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 180°$

$m(\widehat{D}) + m(\widehat{A}) = 180°$

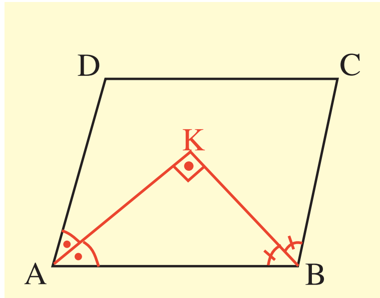


3. Kenar uzunlukları a ve b olan paralelkenarın çevresi :

Ç = 2 . (a + b)

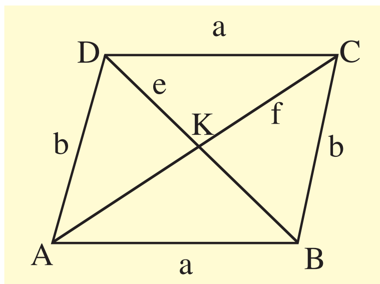
4. Paralelkenarın ardışık iki açısının açıortayları dik olarak kesişirler.

$[AK] \perp [BK]$



5. Paralelkenarların kenarları ve köşegenleri arasında $|BD| = e$, $|AC| = f$ ise

$e^2 + f^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$ bağıntısı vardır.



İspat

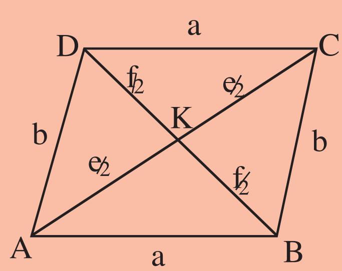
ABD üçgeninde kenarortay bağıntısı yazılırsa

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \frac{e^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \frac{f^2}{4} + \frac{e^2}{2}$$

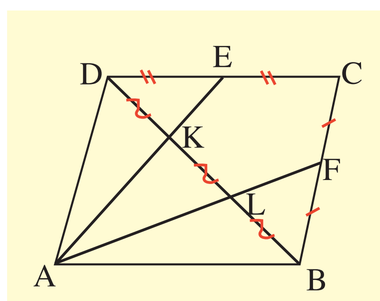
$$a^2 + b^2 = \frac{f^2}{2} + \frac{e^2}{2}$$

$$\Rightarrow e^2 + f^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2) \text{ olur.}$$

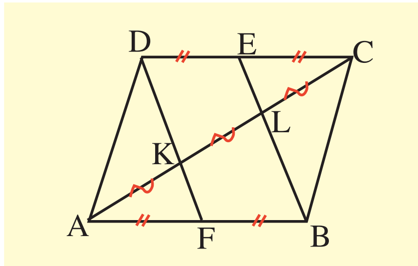


6. $|DE| = |EC|$ ve $|BF| = |CF|$ ise

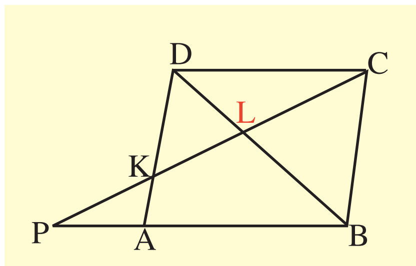
$|DK| = |KL| = |LB|$ dir.



7. $|DE| = |EC|$ ve $|AF| = |FB|$ ise $|AK| = |KL| = |LC|$ dir.

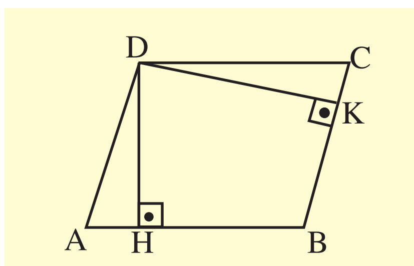


8. ABCD parelelkenarında benzerlik yazılırsa $|LC|^2 = |KL| . |PL|$ bağıntısı elde edilir.



Örnek

Şekilde ABCD bir parelelkenar, $[DH] \perp [AB]$, $[DK] \perp [BC]$, $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 4$ cm ve $|DH| = 5$ cm ise $|DK|$ kaç cm dir?



Çözüm

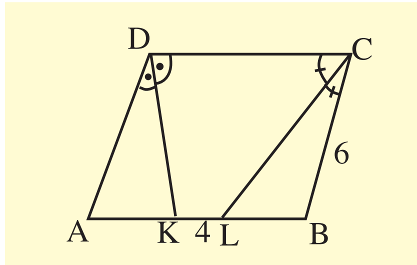
$A = a . h_a = b . h_b$

$\Rightarrow 8 . 5 = 4 . x$

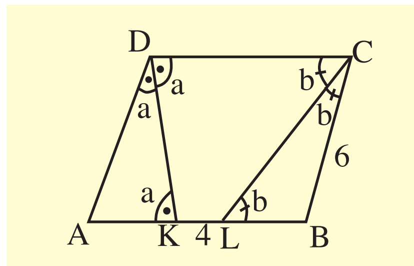
$x = 10$ cm olur.

Örnek

Şekilde, ABCD bir paralelkenar, [DK] ve [CL] açıortaydır. |KL| = 4 cm, |BC| = 6 cm olduğuna göre ABCD paralelkenarının çevresi kaç cm dir?



Çözüm



$m(\widehat{CLB}) = m(\widehat{DCL})$ (İç ters açılar)

$m(\widehat{AKD}) = m(\widehat{KDC})$ (İç ters açılar)

Dolayısıyla |BC| = |BL| = 6 cm ve

|AD| = |AK| = 6 cm olur.

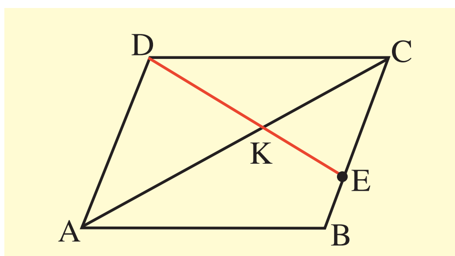
ABCD nin çevresi,

Ç = 6 + 4 + 6 + 6 + 16 + 6

Ç = 44 cm olur.

Örnek

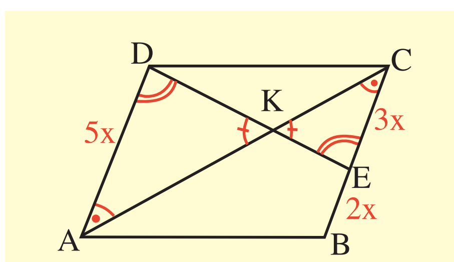
ABCD bir parelelkenar, $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{2}{3}$ olduğuna göre $\frac{|AK|}{|KC|}$ oranı kaçtır?



Çözüm

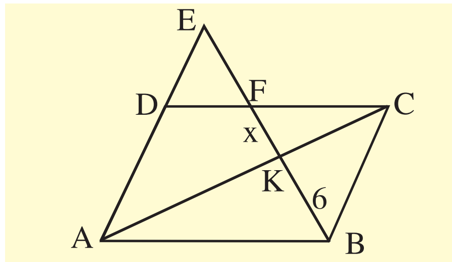
$\overset{\Delta}{AKD} \sim \overset{\Delta}{CKE}$ (A.A.A)

$\frac{|AD|}{|EC|} = \frac{|AK|}{|KC|} = \frac{5}{3}$ olur.



Örnek

Aşağıdaki şekilde, ABCD bir parelelkenar, $|KB| = 6$ cm, $|EK| = 9$ cm ise $|FK|$ kaç cm dir?



Çözüm

$|KB|^2 = |FK| \cdot |EK|$

$6^2 = x \cdot 9$

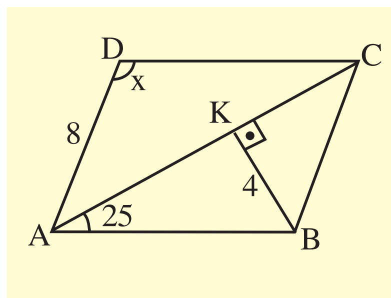
$x = \frac{36}{9} = 4$ cm olur.

Örnek

ABCD bir parelelkenar, $[BK] \perp [AC]$,

$|AD|=8$ cm, $|BK| = 4$ cm ve $m(\widehat{CAB})=25°$ ise

$m(\widehat{D})$ kaç derecedir?



Çözüm

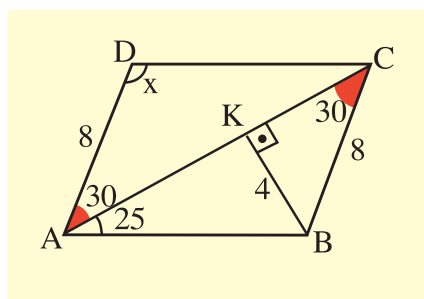
$|AD| = |BC| = 8$ cm, $|BK| = 4$ cm,

$m(\widehat{ACB}) = 30°$ dir. (Dik üçgende 30° nin karşısındaki kenar hipotenüsün yarısı kadardır.)

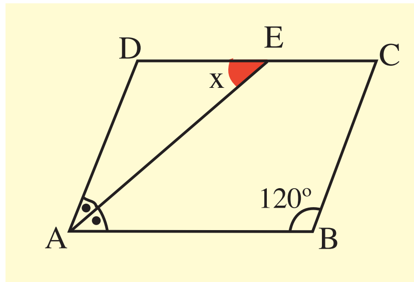
$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ACB}) = 30°$ (İç ters açılar)

$m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{ADC}) = 180°$

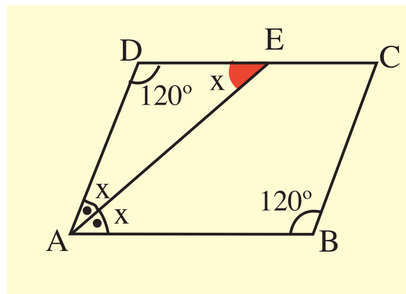
$\Rightarrow m(\widehat{ADC}) = 180-55 = 125°$ olur.



Örnek Şekilde ABCD paralelkenardır. Verilenlere göre, $m(\widehat{AED}) = x$ açısı kaç derecedir?



Çözüm



$m(\widehat{AED}) = m(\widehat{EAB}) = x$ (içters açılar)

$m(\widehat{EAB}) = m(\widehat{EAD}) = x$ (açıortay olduğundan)

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 120°$ (paralelkenarda karşılıklı açılar eşit olduğundan) ADE üçgeninde,

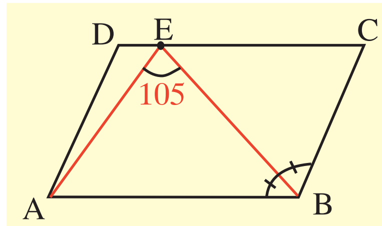
$120° + x + x = 180°$

$\Rightarrow 2x = 60°$

$\Rightarrow x = 30°$ olur.

ARAŞTIRMA SORULARI (4)

1. ABCD parelelkenar, $m(\widehat{AEB}) = 105°$,
$m(\widehat{EBC}) = 65°$ olduğuna göre $m(\widehat{DAC})$
kaç derecedir?



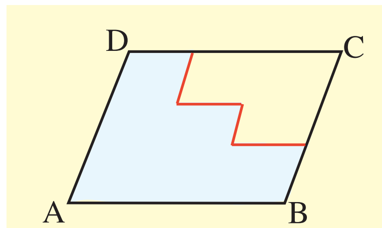
A) 40°

B) 45°

C) 50°

D) 60°

2. ABCD parelelkenar ve mavi boyalı alanın karşılıklı kenarları paraleldir. Mavi boyalı alanın çevresi 28 cm ise ABCD nin çevresi kaç cm dir?



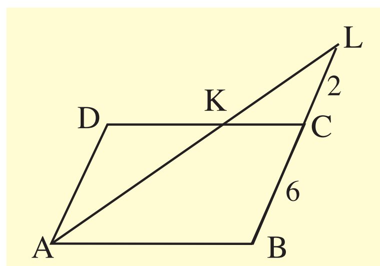
A) 24

B) 28

C) 30

D) 32

3. Şekilde, ABCD bir paralelkenardır.
|BC| = 6 cm, |CL| = 2 cm ise



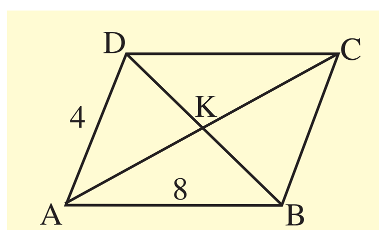
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

4. ABCD parelelkenar, |AB| = 8 cm,
|AD| = 4 cm, ve



A) $2\sqrt{2}$

B) $4\sqrt{2}$

C) $2\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$

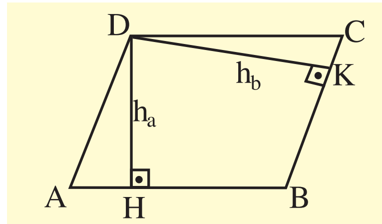
5. ABCD parelelkenar, $\frac{h_b}{h_a} = 4$ ve ABCD'nin

A) 14

B) 16

C) 18

D) 20



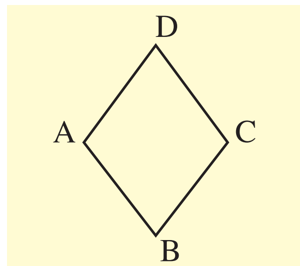
9. EŞKENAR DÖRTGEN

Dört kenarı birbirbirine eşit olan parelelkenara eşkenar dörtgen denir.

|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a

[AB]//[CD] ve [BC]//[AD] dir.

Eşkenar dörtgen, parelelkenarın bütün özeliklerini taşır.

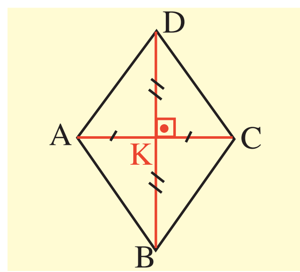


EŞKENAR DÖRTGENİN ÖZELLİKLERİ

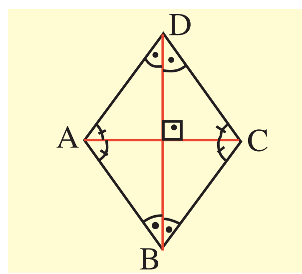
1. Köşegenler birbirlerini ortalayarak keserler.

[AC]⊥[BD]

|AK| = |KC| ve |KB| = |KD| dir.



2. Köşegenler açıortaydır ve dik olarak kesişirler.

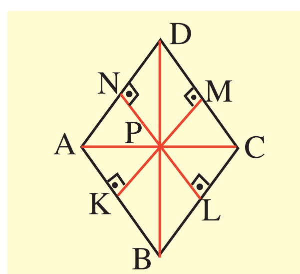


3. Köşegenlerin kesim noktası kenarlardan eşit uzaklıktadır.

|PK| = |PL| = |PM| = |PN| dir.

4. Eşkenar dörtgenin çevresi :

Ç = 4.a dır.



5. Kenar uzunluğu **a**, köşegenleri **e** ve **f** olan eşkenar dörtgende

$e^2 + f^2 = 4 \cdot a^2$ bağıntısı vardır.

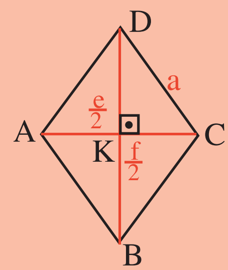
İspat

ABK dik üçgeninde

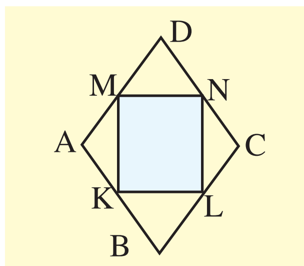
$|AB|^2 = |AK|^2 + |KB|^2$

$a^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$

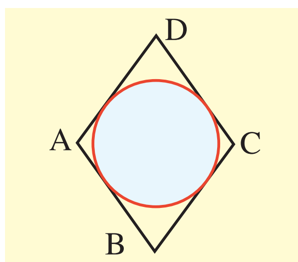
$\Rightarrow e^2 + f^2 = 4.a^2$ olur.



6. Eşkenar dörtgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilirse bir dikdörtgen elde edilir.



7. Eşkenar dörtgende iç teğet çember olmasına karşılık çevrel çember yoktur.



Örnek

Köşegenleri 18 cm ve 24 cm olan eşkenar dörtgenin çevresi kaç cm dir?

Çözüm

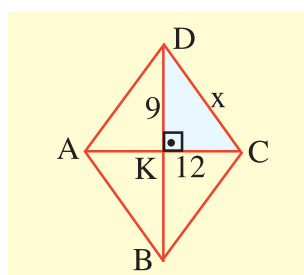
DKC dik üçgeninde

$x^2 = 9^2 + 12^2$

$x^2 = 225$

$\Rightarrow x = 15$ cm

$\Rightarrow Ç = 4.15 = 60$ cm olur.



Örnek

Köşegen uzunlukları 12 ve 16 cm olan eşkenar dörtgende köşegenlerin kesim noktasının bir kenara olan uzaklığı kaç cm dir?

Çözüm

DPC dik üçgeninde

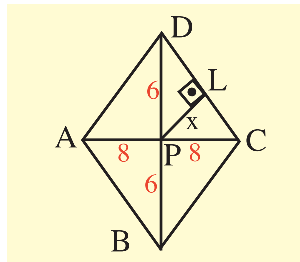
$|DC|^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$\Rightarrow |DC| = 10$ cm

$|PL| \,.\, |DC| = |DP| \,.\, |PC|$

$x \,.\, 10 = 6 \,.\, 8$

$\Rightarrow x = 4{,}8$ cm olur.



Örnek

Köşegenleri e ve f olan eşkenar dörtgende

$\frac{e}{f} = \frac{3}{4}$ ve eşkenar dörtgenin çevresi

Ç = 40 cm olduğuna göre f uzunluğu kaç cm dir?

Çözüm

Ç = 4a = 40

$\Rightarrow a = 10$ cm dir.

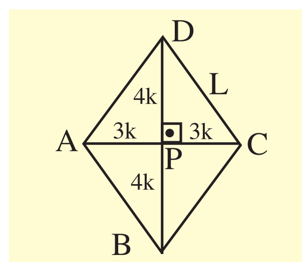
$\frac{e}{f} = \frac{3}{4}$ ise $e = 6k$, $f = 8k$ olur.

Dolayısıyla $|PD| = 4k$, $|PC| = 3k$ dır.

$(3k)^2 + (4k)^2 = 100$

$25 \,.\, k^2 = 100 \Rightarrow k = 2$

$f = 8k = 8 \,.\, 2 = 16$ cm olur.



Örnek

ABCD eşkenar dörtgen, $m(\widehat{A}) = 60°$, $h_a = 4\sqrt{3}$ cm ise ABCD eşkenar dörtgenin çevresi kaç cm dir?

Çözüm

DAH dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 60°$,

$m(\widehat{ADH}) = 30°$ olduğundan,

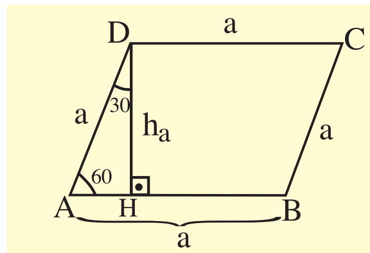
$|AH| = \frac{1}{2}|AD|$, $|DH| = \sqrt{3}\,|AH|$ dir.

$4\sqrt{3} = \sqrt{3}\,|AH|$ ise $|AH| = 4$ cm dir.

$|AH| = \frac{1}{2}|AD|$ ise $4 = \frac{1}{2}|AD|$

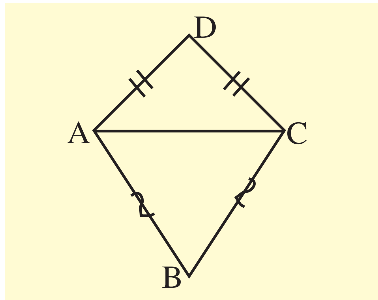
$\Rightarrow |AD| = 8$ cm dir.

Çevre = 4.a = 4.8 = 32 cm bulunur.



10. DELTOİD

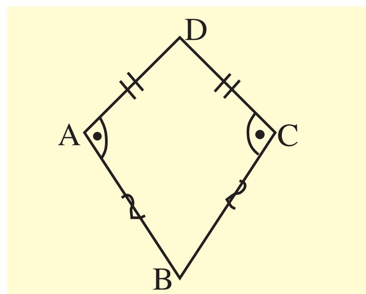
Tabanları ortak, ikiz kenar uzunlukları farklı olan iki tane ikizkenar üçgenin oluşturduğu dörtgene deltoid denir.



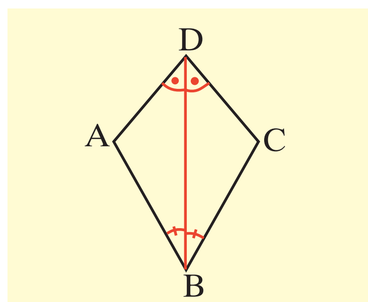
|AB| = |BC| ve |AD| = |DC| dir.

Özelikleri :

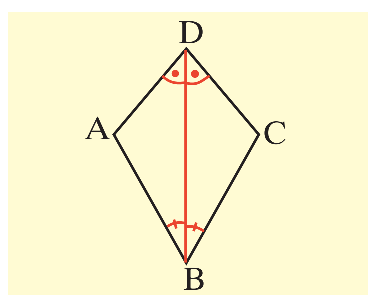
1. İkiz olmayan kenarlar arasında kalan açılar eşittir.
Şekilde, $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$ dir.



2. [BD] köşegeni B ile D açılarının açıortayıdır.



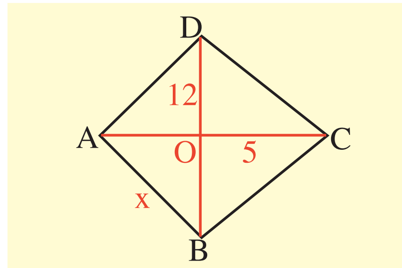
3. Deltoid'de köşegenler dik olarak kesişirler.



ARAŞTIRMA SORULARI (5)

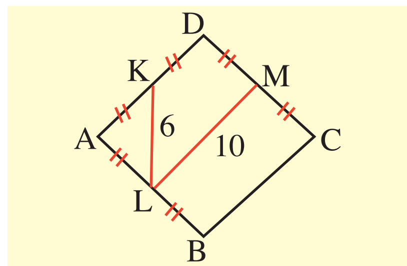
1. Şekildeki eşkenar dörtgende x uzunluğu kaç cm dir?

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13



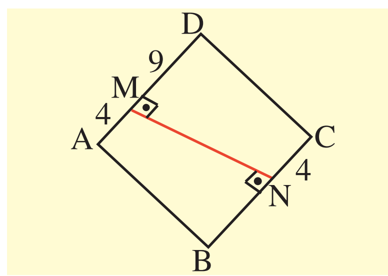
2. ABCD eşkenar dörtgen K, L, M noktaları kenarların orta noktalarıdır. |KL| = 6 cm ve |LM| = 10 cm ise |AC| köşegen uzunluğu kaç cm dir?

A) 14
B) 16
C) 18
D) 20



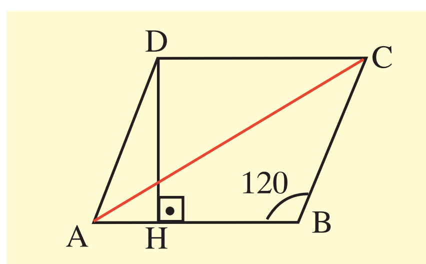
3. ABCD eşkenar dörtgenin alanı kaç cm^2 dir?

A) 120
B) 140
C) 156
D) 166

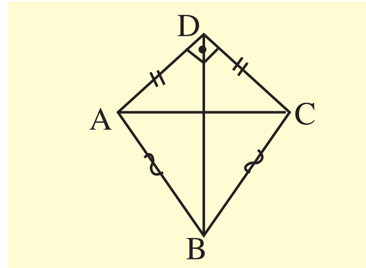


4. ABCD eşkenar dörtgen, |HB| = 2 cm ise |AC| kaç cm dir?

A) $\sqrt{2}-1$
B) $\sqrt{2}+1$
C) $\sqrt{3}-1$
D) $4\sqrt{3}$



5. Şekilde ABCD bir deltoid, $m(\widehat{D}) = 90^\circ$,
$|AD| = |DC|$ $|AB| = |BC| = |AC|$ dir.



A) $2\sqrt{3}$

B) $5\sqrt{3}$

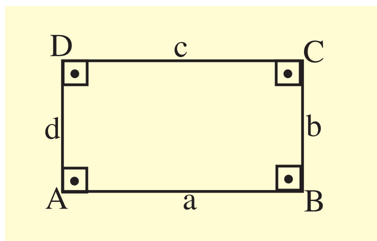
C) $\sqrt{3}-1$

D) $\sqrt{3}+1$

11. DİKDÖRTGEN

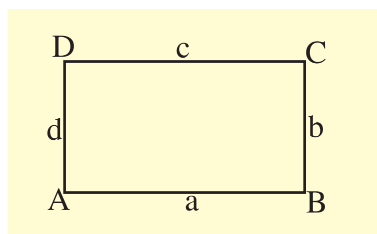
Açılarından biri dik olan parelelkenara dikdörtgen denir.

Dikdörtgen, parelelkenarın bir özel durumudur. Dolayısıyla parelelkenarın tüm özeliklerini taşır.



DİKDÖRTGENİN ÖZELLİKLERİ

1. Karşılıklı kenarları eşit ve pareleldir.



a) $a \parallel c$ ve $b \parallel d$

b) $a = c$ ve $b = d$

2. Bütün açıların ölçüleri 90° dir.

Yani $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$

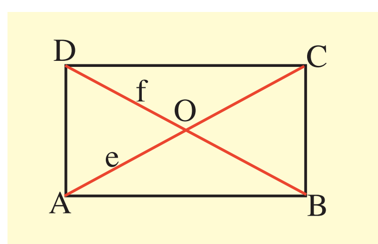
3. Dikdörtgenin çevresi :

$Ç = 2 \cdot (a + b)$

4. Dikdörtgenlerin köşegenleri eşittir.

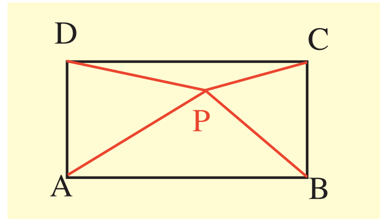
Birbirlerini ortalayarak keserler.

$e = f = \sqrt{a^2 + b^2}$



5. P noktası, dikdörtgenin iç bölgesinde olmak üzere

$|AP|^2 + |CP|^2 = |PB|^2 + |DP|^2$ dir.



İspat

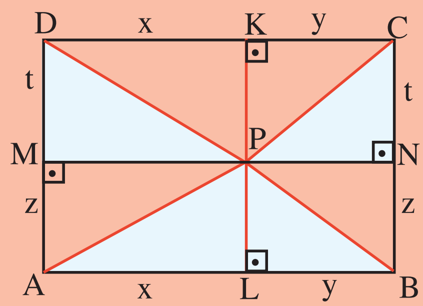
[KL] ⊥[AB] ve [MN] ⊥ [BC] çizelim:

Taralı üçgenlerde Pisagor bağıntıları yazılırsa

$|PA|^2 = x^2 + z^2$

$|PC|^2 = y^2 + t^2$

$\Rightarrow |PA|^2 + |PC|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ (1)



$|PB|^2 = y^2 + z^2$

$|PD|2 = x^2 + t^2$

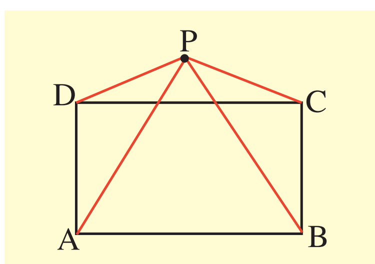
$\Rightarrow |PB|^2 + |PD|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ (2)

1 ve 2 den

$|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2$ olur.

6. P noktası dikdörtgenin dış bölgesinde olmak üzere

$|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2$ dir.



Örnek

Kenarları 3 ve 8 ile orantılı olan bir dikdörtgenin alanı 216 cm^2 olduğuna göre dikdörtgenin çevresi kaç cm dir?

Çözüm

$\frac{a}{3} = \frac{b}{8} = k$

$a = 3k,\ b = 8k$

$A = 24.\ k^2 = 216$

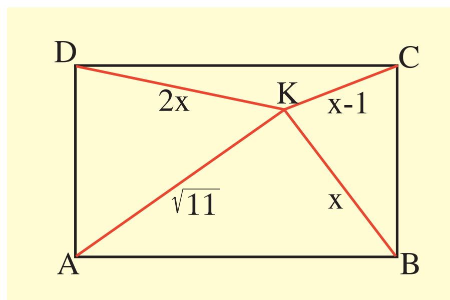
$\Rightarrow k^2 = 9$

$\Rightarrow k = 3, \quad a = 9, \quad b = 24$ cm dir.

Ç = 2 . (a + b) = 2 . (9 + 24) = 2 . 33 = 66 cm olur.

Örnek

Şekilde verilenlere göre **x** kaç birimdir?



Çözüm

$(\sqrt{11}\,)^2 + (x - 1)^2 = (2x)^2 + x^2$

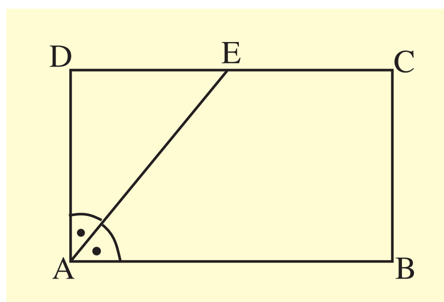
$11 + x^2 - 2x + 1 = 4x^2 + x^2$

$4x^2 + 2x - 12 = 0$

$2x^2 + x - 6 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$ birim olur.

Örnek

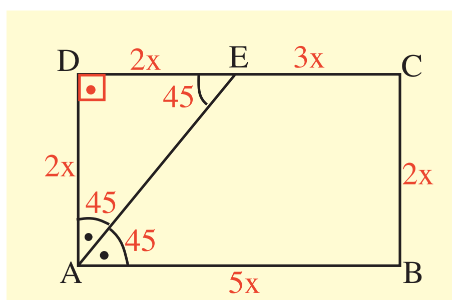


ABCD dikdörtgen, |AE] açıortay

$\frac{|DE|}{|EC|} = \frac{2}{3}$ ve A(ABCD) = 40 cm^2

ise ABCD' nin çevresi kaç cm dir?

Çözüm



ADE üçgeni ikizkenar üçgendir.

|DE| = |AD| = 2x ve |AB| = 5x

A (ABCD) = 2x.5x = 40

$\Rightarrow$ x = 2 olur.

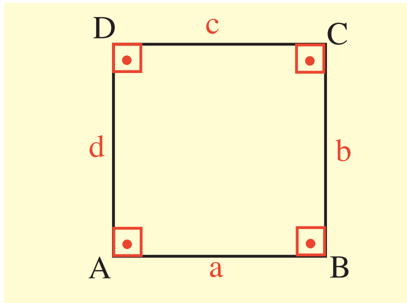
Ç(ABCD) = 2.(2x + 5x) = 14x

$\Rightarrow$ Ç = 14.2 = 28 cm dir.

12. KARE

Bütün kenarları eşit olan dikdörtgene veya bütün açıları dik olan eşkenar dörtgene kare denir.

$a = b = c = d$ ve $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90°$

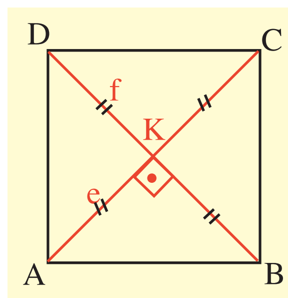


KARENİN ÖZELLİKLERİ

1. Kare, parelelkenar ve dikdörtgenin tüm özeliklerini taşır. (Bütün kenarları eşit olduğu için eşkenar dörtgenin de özeliklerini taşır.)

2. Karenin çevresi $Ç = 4 \cdot a$ dır.

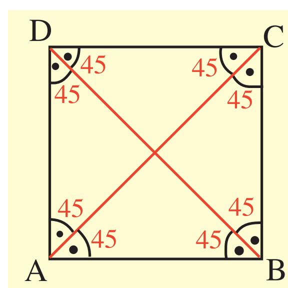
3. Köşegenler birbirlerini ortalayarak ve dik olarak keserler.



$e \perp f$

$|DK| = |KB| = |AK| = |KC|$ dır.

4. Karede köşegenler açıortaydır.



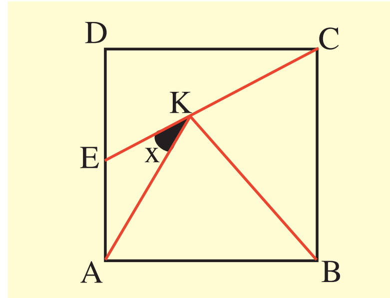
Karşıt özelik
Bir dikdörtgende, köşegenler açıortay ise o dikdörtgen bir karedir.

5. Karenin bir köşegeninin uzunluğu kenar cinsinden

$e = f = a\sqrt{2}$ dir.

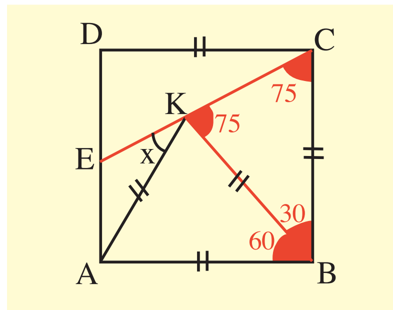
Örnek

ABCD bir kare, ABK
bir eşkenar üçgen olduğuna göre
$m(\widehat{EKA})$ kaç derecedir?



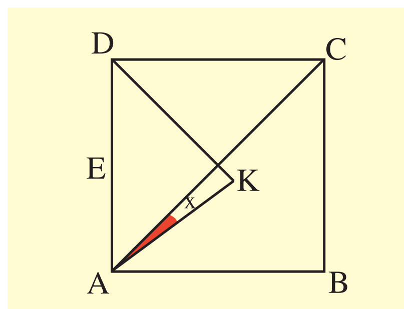
Çözüm

ABK eşkenar üçgen olduğundan
$m(\widehat{AKB}) = m(\widehat{KBA}) = 60°$ dir.
$m(\widehat{B}) = 90°$ ise $m(\widehat{KBC}) = 30°$ olur.
$|KB| = |BC|$ olduğundan
KBC ikizkenar üçgendir. (Taban açıları eşit)
Taban açıları $m(\widehat{BKC}) = m(\widehat{BCK}) = 75°$ olur.
$x + 60° + 75° = 180°$ (Doğru açı)
$\Rightarrow x = 45°$ olur.



Örnek

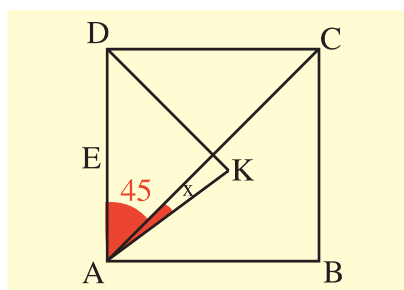
ABCD bir kare, AKD bir
eşkenar üçgendir. $m(\widehat{CAK})$ kaç derecedir?



Çözüm

[AC] köşegeni açıortaydır.

Yani $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAB}) = 45°$ dir.
AKD eşkenar üçgen olduğundan
$x = 60° - 45° = 15°$ olur.

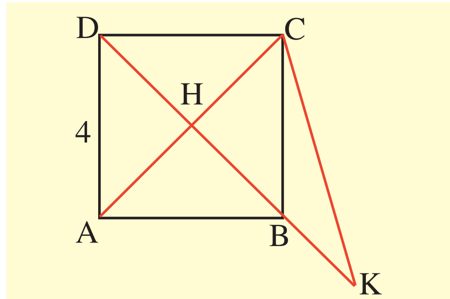


Örnek

ABCD bir kare |AD| = 4 cm,

|DB| = 2 |BK| ise

|CK| uzunluğu kaç cm dir?



Çözüm

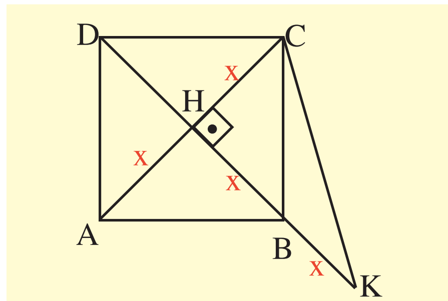
$2x = 4\sqrt{2}$ dir.

CHK dik üçgendir.

$|CK|^2 = (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2$

$= 8 + 32 = 40$

$\Rightarrow |CK| = 2\sqrt{10}$ olur.



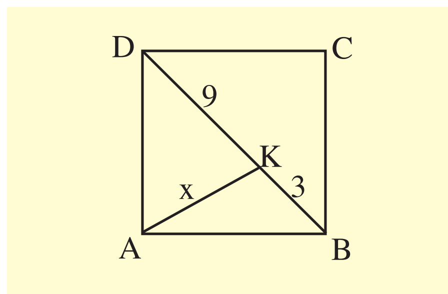
Örnek

Şekilde, ABCD bir kare

|BK| = 3 cm

|DK| = 9 cm ise

|KA| kaç cm dir?

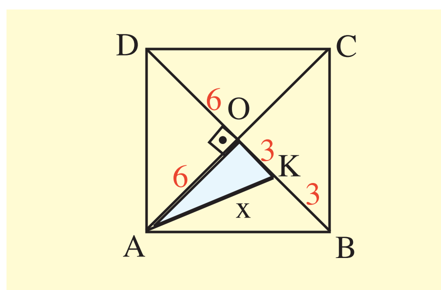


Çözüm

[AC] köşegenini çizelim.

Karenin özeliğinden,

|AO| = |OC| = |OB| = |OD| = 6 cm dir.



|KB| = 3 cm olduğundan |OK| = 3 cm olur.

AOK dik üçgeninde,

$x^2 = 6^2 + 3^2$

$x^2 = 36 + 9 = 45$

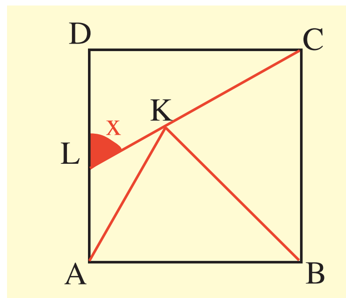
$x = 3\sqrt{5}$ cm dir.

ARAŞTIRMA SORULARI (6)

1. Bir dikdörtgenin kenarları 3 ve 4 ile orantılı olup, çevresi 42 cm dir. Bu dikdörtgenin bir köşegeninin uzunluğu kaç cm dir?

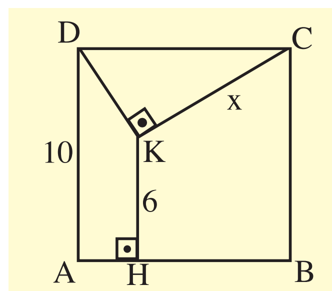
A) 13
B) 14
C) 15
D) 16

2. ABCD bir kare, ABK bir eşkenar üçgen ise, $m(\widehat{DLC})$ kaç derecedir?



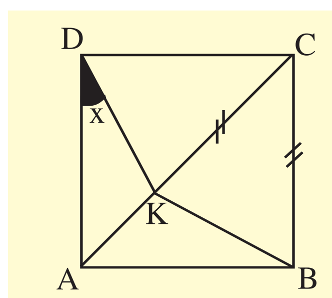
A) 45°
B) 60°
C) 75°
D) 80°

3. ABCD bir kare, [KH] ⊥[AB], [DK]⊥[KC], |AB| = 10 cm, |KH|= 6 cm ise |KC| kaç cm olabilir?



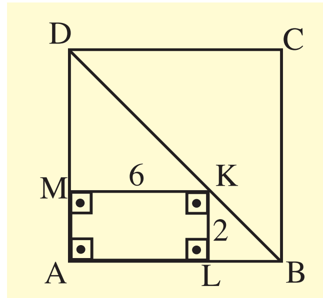
A) $3\sqrt{2}$
B) $3\sqrt{3}$
C) $2\sqrt{5}$
D) $6\sqrt{5}$

4. ABCD bir kare |CK| = |CB| ise $m(\widehat{ADK})$ kaç derecedir?



A) 7,5
B) 12,5
C) 17,5
D) 22,5

5. ABCD bir kare, |MK| = 6 cm, |KL| = 2 cm ise |BC| kaç cm dir?



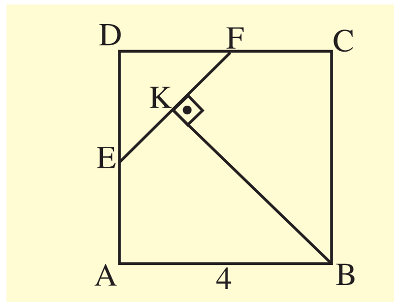
A) 10

B) 9

C) 8

D) 7

6. ABCD bir kare [EF]⊥[BK], |AE| = |ED|, |DF| = |FC| ve |AB| = 4 cm ise |KB| kaç cm dir?



A) $\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{2}$

C) $3\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{2}$

7. Kenar uzunlukları x ve 1/x birim olan bir dikdörtgenin bir köşegeninin uzunluğu 4 birim olduğuna göre çevresi kaç birimdir?

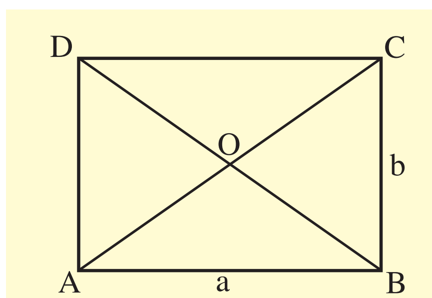
A) 6

B) $6\sqrt{2}$

C) $6\sqrt{3}$

D) 8

8. ABCD dikdörtgen, |OC| = 3x -5, |OB| = 2x - 2 ve |AB| = 6 cm olduğuna göre |BC| kaç cm dir?



A) $\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $2\sqrt{7}$

D) 6

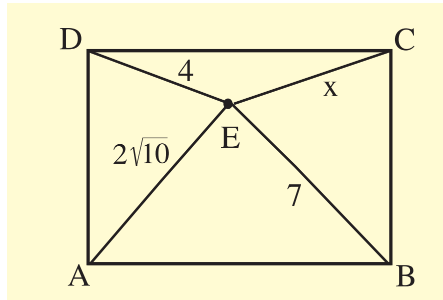
9. Şekildeki dikdörtgende, $|DE| = 4$ cm, $|EB| = 7$ cm $|EA| = 2\sqrt{10}$ cm ise $|EC|$ uzunluğu kaç cm dir?

A) 4

B) 5

C) 6

D) 8



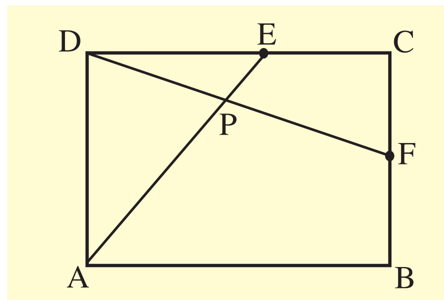
10. Şekilde ABC dikdörtgen, E, F kenarların orta noktaları ise $\frac{|AP|}{|PE|}$ oranı nedir?

A) $\frac{1}{2}$

B) 2

C) 3

D) 4



ÖZET

1. Bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, n kenar sayısı olmak üzere $(n - 2).\ 180°$ dir.

2. Bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

$$m(\widehat{A'}) + m(\widehat{B'}) + m(\widehat{C'}) + m(\widehat{D'}) + \ldots\ldots = 360°$$

3. n kenarlı bir çokgenin köşegen sayısı

$\dfrac{n\ .\ (n - 3)}{2}$ dir.

4. Kenar uzunlukları eşit olan çokgene düzgün çokgen denir.

a. Düzgün çokgenin iç açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

b. Düzgün çokgenin dış açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

c. n kenarlı bir düzgün çokgende bir iç açının ölçüsü, $\dfrac{(n-2)\ .\ 180°}{n}$ ve bir dış açının ölçüsü $\dfrac{360°}{n}$ dir.

5. Bir konveks dörtgenin iç açılarının toplamı ve dış açıları toplamı 360° dir.

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360°$$

$$m(\widehat{A'}) + m(\widehat{B'}) + m(\widehat{C'}) + m(\widehat{D'}) = 360°$$

6. Bir dörtgende köşegenlerin oluşturduğu karşılıklı alanların çarpımları eşittir.

$S_1\ .\ S_3 = S_2\ .\ S_4$

7. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan, köşegenleri dik olarak kesişen bir konveks dörtgenin kenarları arasında $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ bağıntısı vardır.

8. Bir yamukta yan kenarların orta noktalarını birleştiren doğruya, orta taban denir. Orta taban uzunluğu, alt ve üst tabanlarının uzunluklarının toplamının yarısı kadardır.

9. İkizkenar yamukta taban açıları eşittir.

10. İkizkenar yamukta köşegen uzunlukları birbirine eşittir.

11. Dik yamuğun yüksekliği dik kenara eşittir. Yani $\mathbf{h = d}$ dir.

12. Köşegenleri, dik olarak kesişen dik yamukta, $\mathbf{h^2 = a\ .\ c}$ bağıntısı vardır.

13 . Paralelkenarın karşılıklı açıları eşittir.

14. Paralelkenarda ardışık iki açının toplamı 180° dir.

15. Kenar uzunlukları a ve b olan paralelkenarın çevresi : $Ç = 2 . (a + b)$ dir.

16. Paralelkenarın ardışık iki açısının açıortayları dik olarak kesişirler.

17. Paralelkenarların kenarları ve köşegenleri arasında

$e^2 + f^2 = 2 . (a^2 + b^2)$ bağıntısı vardır.

18. Eşkenar dörtgende köşegenler birbirlerini ortalayarak keserler.

19. Eşkenar dörtgende köşegenler açıortaydır ve dik olarak kesişirler.

20. Eşkenar dörtgende köşegenlerin kesim noktası kenarlardan eşit uzaklıktadır.

21. Eşkenar dörtgenin çevresi : **Ç = 4.a** dır.

22. Kenar uzunluğu **a**, köşegenleri **e** ve **f** olan eşkenar dörtgende $e^2 + f^2 = 4.a^2$ bağıntısı vardır.

23. Deltoid'de köşegenler dik olarak kesişirler.

24. Kare, paralelkenar ve dikdörtgenin tüm özelliklerini taşır. (Bütün kenarları eşit olduğu için eşkenar dörtgenin de özelliklerini taşır.)

25. Karenin çevresi: **Ç = 4.a** dır.

26. Karede köşegenler birbirlerini ortalayarak ve dik olarak keserler.

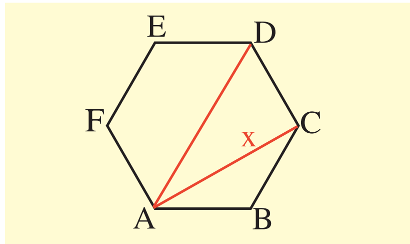
27. Karede köşegenler açıortaydır.

28. Karenin bir köşegeninin uzunluğu kenar cinsinden $e = f = a\sqrt{2}$ dir.

TEST I

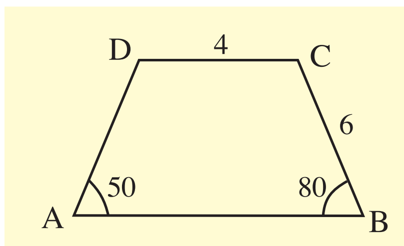
1. Şekilde ABCDEF düzgün altıgendir. $|AD| = 6\sqrt{3}$ cm ise $|AC|$ kaç cm dir?

A) $3\sqrt{3}$
B) $6\sqrt{2}$
C) 6
D) 9



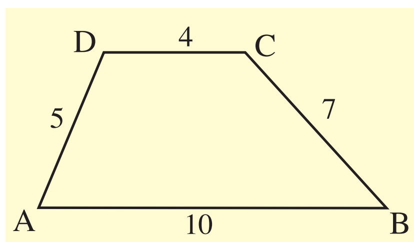
2. Bir ABCD yamuğunda, $m(\widehat{A}) = 50°$, $m(\widehat{B}) = 80°$, $|BC| = 6$ cm, $|DC| = 4$ cm ise $|AB|$ kaç cm dir?

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10



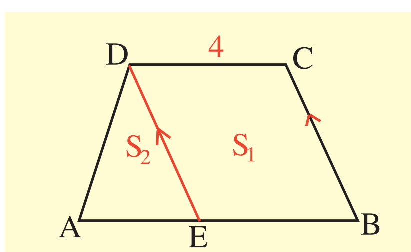
3. ABCD yamuğunda, $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 7$ cm, $|DC| = 4$ cm ve $|AD| = 5$ cm ise yamuğun yüksekliği kaç cm dir?

A) $4\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{6}$
C) $5\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{3}$



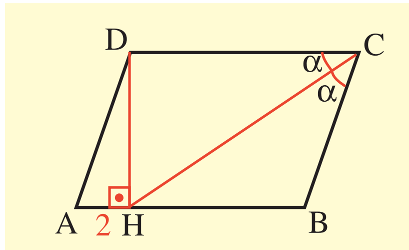
4. ABCD bir yamuk, [DE] // [BC], $S_1 = 2S_2$ ve $|DC| = 4$ cm ise $|AB|$ uzunluğu kaç cm dir?

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12



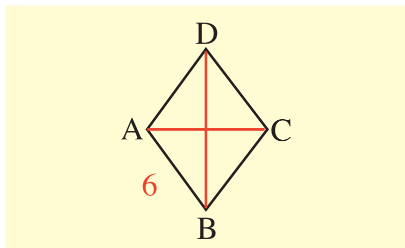
5. ABCD parelelkenar, [DH] ⊥[AB], [CH] açıortay, $m(\widehat{ADH}) = m(\widehat{DCH})$ ve |AH| = 2 cm ise paralelkenarın çevresi kaç cm dir?

A) 12
B) 16
C) 18
D) 20



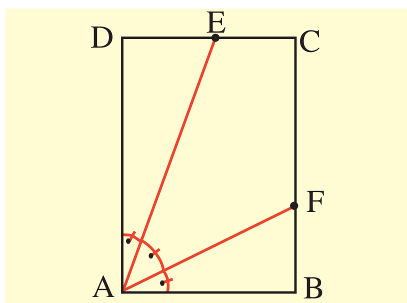
6. ABCD eşkenar dörtgen, |AB| = |AC| = 6 cm ise |BD| uzunluğu kaç cm dir?

A) $4\sqrt{3}$
B) $5\sqrt{3}$
C) $6\sqrt{3}$
D) $8\sqrt{3}$



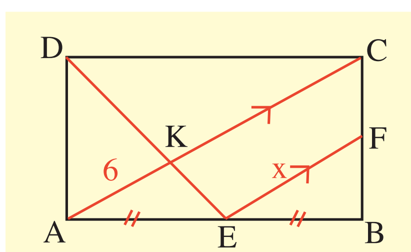
7. ABCD dikdörtgen, |CF| = 2.|FB| ve $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{EAF}) = m(\widehat{FAB})$ ise $\dfrac{|AE|}{|AF|}$ oranı kaçtır?

A) $\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$



8. ABCD dikdörtgen, [AC] //[EF], |AE| = |EB|, |AK| = 6 cm olduğuna göre |EF| kaç cm dir?

A) 6
B) 8
C) 9
D) 10



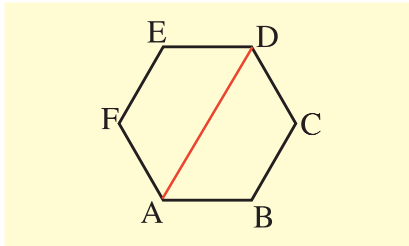
9. ABCDEF düzgün altıgendir. |BC| = 6 cm ise |AD| kac cm dir?

A) 8

B) 9

C) 10

D) 12



10. ABCD yamuğunda |BC| = 6 cm, [AC] ⊥ [BC] ise, |AB| uzunluğu kaç birimdir?

A) 9

B) 10

C) 11

D) 12