



ÜNİTE II

AÇILAR

1. AÇI VE ADLANDIRILMASI
 2. AÇILARIN YÖNLENDİRİLMESİ
 3. BİR AÇININ İÇ VE DIŞ BÖLGESİ
 4. KOMŞU AÇILAR
 5. BİR AÇININ ÖLÇÜSÜ
 6. TERS AÇILAR
 7. AÇI ÇEŞİTLERİ
 8. TÜMLER VE BÜTÜNLER AÇILAR
 9. AÇILARIN EŞLİĞİ
 10. DOĞRULARIN DİKLİĞİ
 11. BİR AÇININ AÇIORTAYI
 12. DÜZLEMDE BİR DOĞRUNUN İKİ DOĞRUYU KESMESİYLE OLUŞAN AÇILAR
 13. KENARLARI PARALEL AÇILAR
 14. KENARLARI DİK AÇILAR
- BÖLÜMÜN ÖZETİ
- ARAŞTIRMALAR
- DEĞERLENDİRME SORULARI



BU BÖLÜMÜN AMAÇLARI



Bu bölümü çalıştığınızda ;

- * Açıları adlandırıp, köşe ve kenarlarını belirtebilecek,
- * Verilen şekle göre adlandırılmış bir açının yönünü söyleyebilecek,
- * Bir açının düzlemden ayırdığı nokta kümelerini söyleyebilecek,
- * Bir açıyı ölçmeyi öğrenecek,
- * Açı çeşitlerini tanıyacak,
- * Komşu açılar, tümler ve bütünler açılar, ters açılar tanıyacak, özelliklerini öğrenecek ve bunlarla ilgili örnekleri yapabilecek,
- * Doğruların dikliğini, açılar eşliğini ve bir açının açıortayını tanımlayabilecek,
- * Paralel iki doğrunun bir kesenle yaptığı açılar tanıyacak, bunlarla ilgili aksiyom ve teoremleri öğrenecek, uygulamalarını yapabilecek,
- * Kenarları paralel açılar tanıyacak, ilgili teoremleri öğrenecek ve ilgili uygulamalar yapabilecek,
- * Kenarları dik açılar tanıyacak, ilgili teoremleri öğrenecek ve ilgili uygulamalar yapabileceksiniz.



NASIL ÇALIŞMALIYIZ?



- * Çevrenizdeki eşyaların kenarları ile açı çeşitleri arasında ilişki kurmaya çalışınız.
- * Ders notları arasında verilen soru örneklerini çalıştıktan sonra, bu soruları bakmadan siz de çözmeye çalışınız. Takıldığınız yerde dönüp çözüme bakınız.
- * Konu işlenişinde ve sonunda verilen alıştırma ve değerlendirme sorularını yanıtlayınız.
- * Çalışırken takıldığınız noktalarda ilgili konuya dönüp konuyu yeniden gözden geçirin.
- * Ortaöğretim müfredat programına uygun olan ders kitaplarından, ilgili konulara ait soruları cevaplamaya çalışınız.

1. AÇI VE ADLANDIRILMASI

Şimdiye kadar geometrik kavramlarda nokta, doğru, doğru parçası, düzlem, uzay ve ışın kavramları üzerinde durduk. Bu bölümde iki ışının oluşturduğu geometrik kavramı, yani açı kavramını öğreneceksiniz.



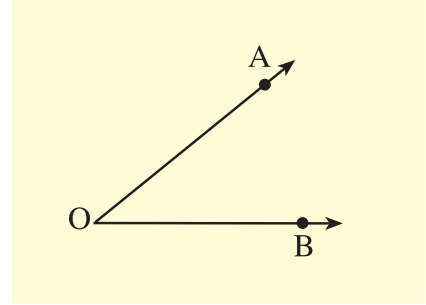
Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşim kümesine **açı** denir. Işınlardan ortak olan başlangıç noktasına açının **köşesi**, ışınlara da açının **kolları** ya da açının **kenarları** adı verilir.

Yanda çizilmiş olan açı,

$\widehat{AOB}$, $\widehat{BOA}$ ya da $\widehat{A}$ olarak adlandırılır.

Bu açılar sıra ile “AOB açısı”, “BOA açısı” ve “A açısı” diye okunur.

O noktası $\widehat{AOB}$ nın köşesi, [OA ve [OB ışınları da açının kolları (ya da kenarları)dır



$$\widehat{AOB} = [OA \cup [OB$$

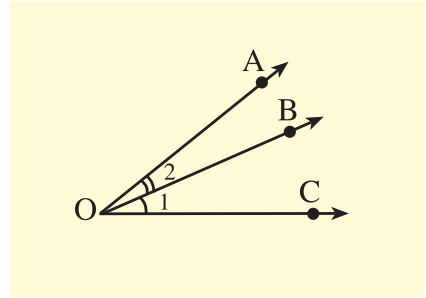
Araştırma

Elinize sivri uçlu iki kalem alınız. Bunların sivri uçlarını birleştirerek çeşitli açılar elde ediniz.

İşlemlerde kolaylık sağlaması bakımından açılar aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi de gösterilebilir.

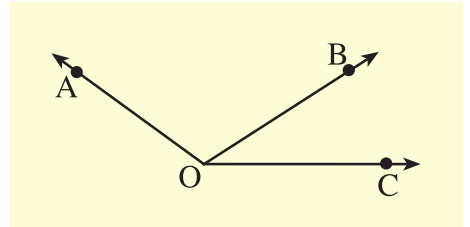
Şekildeki açılar $\widehat{O_1}$, $\widehat{O_2}$ biçimlerinde gösterilip sıra ile “O₁ açısı” ve “O₂ açısı” diye okunurlar.

O₁ açısı, [OB ve [OC ışınlarının oluşturduğu açı; O₂ açısı da [OA ve [OB ışınlarının oluşturduğu açıdır.



Açılar arasındaki işlemlerle ilgili olarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

- $\widehat{AOB} \cup \widehat{AOB} = \widehat{AOB}$
- $\widehat{AOB} \cap \widehat{AOB} = \widehat{AOB}$
- $\widehat{AOB} \cap \widehat{BOC} = [OB$
- $\widehat{AOB} \cup \widehat{BOC} = [OA \cup [OB \cup [OC$

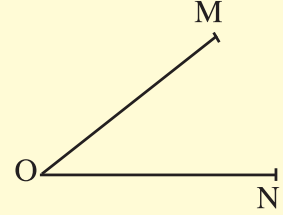




Araştırma

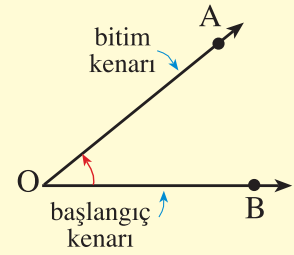
1. Farklı iki açının birleşimi bir açı mıdır?
2. Farklı iki açının kesişimi bir açı mıdır?

Tanıma göre yandaki $[OM]$ ve $[ON]$ doğru parçalarının oluşturduğu şekil bir açı değildir. Ancak çokgenlerin açılarını incelerken $[OM]$ ve $[ON]$ ışınlarının var olduğunu düşünerek MON açısından söz edeceğiz.



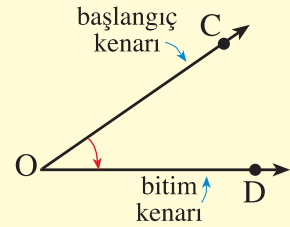
2. AÇILARIN YÖNLENDİRİLMESİ

Bir açı, saat ibresinin hareket yönünün tersi yönde okunduğunda pozitif yönde yönlendirilmiş olur. Örneğin yandaki BOA açısı pozitif yönde yönlendirilmiş bir açıdır. $[OB]$ bu açının başlangıç kenarı, $[OA]$ da bu açının bitim kenarıdır.

Pozitif yönlü açı ($\widehat{BOA}$)

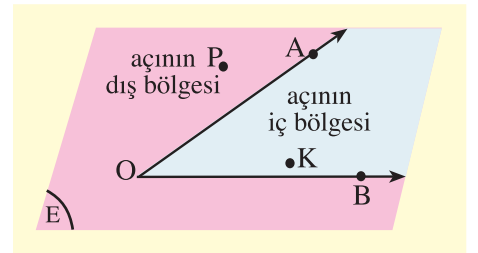
Yandaki açı negatif yönde yönlendirilmiş bir açıdır. COD açısı negatif yönlü bir açıdır. (Yön, saat ibresinin yönü ile aynıdır.)

Bu açının başlangıç kenarı $[OC]$, bitim kenarı $[OD]$ dir.

Negatif yönlü açı ($\widehat{COD}$)

3. BİR AÇININ İÇ VE DIŞ BÖLGESİ

Yandaki şekilde E düzlemi üzerinde AOB açısı çizilmiştir.



$[OA]$ ve $[OB]$ ışınlarına göre K noktası tarafındaki yarı düzlemlerin kesişimi olan bölgeye AOB açısının iç bölgesi denir.

$\widehat{AOB}$ nın üzerindeki noktalar, açının iç bölgesine ait değildir.

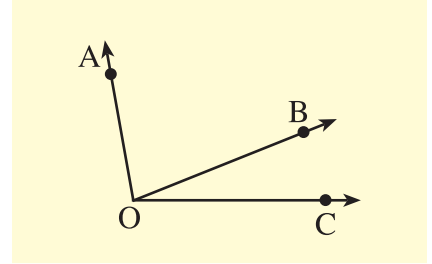


Açının üzerinde ve iç bölgesinde bulunmayan düzleme ait noktaların kümesine açının dış bölgesi denir.

Şekilde A, O ve B noktaları açının üzerinde, K noktası açının iç bölgesinde, P noktası da açının dış bölgesindedir.

4. KOMŞU AÇILAR

Yandaki şekilde [OB kenarları ortak olan $\widehat{AOB}$ ile $\widehat{BOC}$ çizilmiştir. Bu açılarının ortak olmayan kenarları, ortak olan [OB kenarının farklı taraflarındadır.



Birer kenarları ortak, iç bölgeleri ayırık olan iki açiya komşu açılar denir.

Yukarıdaki $\widehat{AOB}$ ile $\widehat{BOC}$ komşu açılardır.



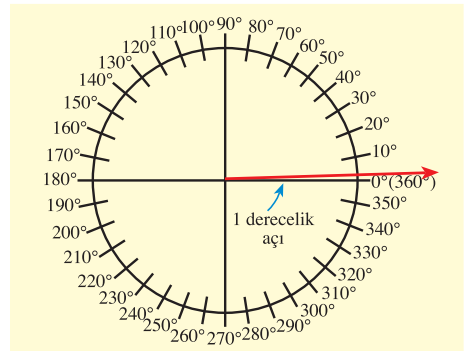
$\widehat{AOB}$ ile $\widehat{AOC}$ komşu açılar mıdır neden ?

5. BİR AÇININ ÖLÇÜSÜ

Bir açının büyüklüğünden söz edebilmek için, açığı bir ölçü birimiyle ölçmek gerekir. Açı ölçme birimi derecedir.

Yandaki çember, birbirine eş olan 360 tane yaya ayrılmıştır. Bu yaylardan birinin uç noktalarından geçen merkez açığa 1 derecelik açı denir.

Bir açığı ölçmek demek, kaç tane 1 derecelik açı ölçüsüne sahip olduğunu aramak demektir.



Bir derecenin $\frac{1}{60}$ ine 1 dakika denir ve $1^\circ = 60'$ biçiminde gösterilir.

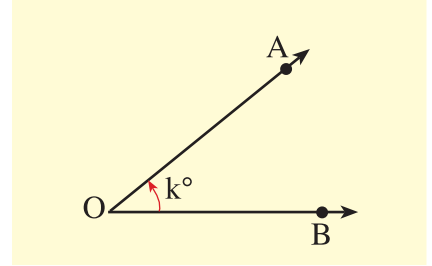
Bir dakikanın $\frac{1}{60}$ ine 1 saniye denir ve $1^\circ = 60''$ biçiminde gösterilir.

Aksiom 2.1	Düzlemde her açığa $0 \leq k \leq 180$ olmak üzere k gibi bir reel sayı karşılık gelir.
-------------------	---

Bu k sayısına açının ölçüsü denir.

Pozitif yönlü bir açının ölçüsü, pozitif bir reel sayı ile, negatif yönlü bir açının ölçüsü negatif bir reel sayı ile gösterilir. Şekle göre;

$$m(\widehat{BOA}) = k^\circ \text{ ve } m(\widehat{AOB}) = -k^\circ \text{ dir.}$$



ÖRNEK : Aşağıda bir doğru üzerinde verilen açıların ölçülerini bulalım:
AOB açısının ölçüsü 60° dir.

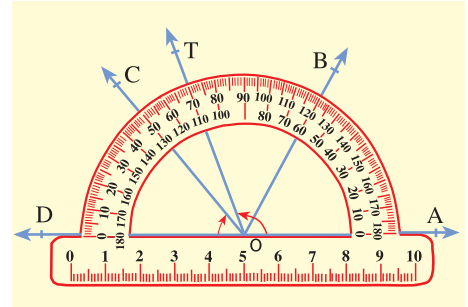
Bunu $m(\widehat{AOB}) = 60^\circ$ biçiminde yazarak gösteririz

AOT açısının ölçüsü 110° dir.

$$m(\widehat{AOT}) = 110^\circ$$

DOC açısının ölçüsü -50° dir.

$$m(\widehat{DOC}) = -50^\circ \text{ (Negatif yönlü açı)}$$

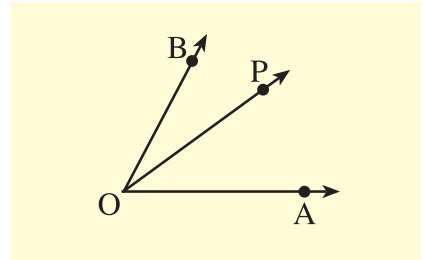


Şekle göre $\widehat{AOC}$, $\widehat{DOT}$, $\widehat{BOD}$ açılarının ölçülerini söyleyiniz.

Aksiom 2.2 (Açı toplama aksiyomu)

P noktası AOB açısının iç bölgesine ait bir nokta olmak üzere;

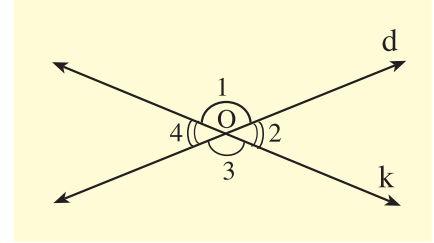
$$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOP}) + m(\widehat{POB}) \text{ dir.}$$



6. TERS AÇILAR

İki doğru kesiştiğinde dört tane açı oluşur. Aşağıdaki şekli inceleyiniz.

$\widehat{O}_1$ ile $\widehat{O}_3$ ve $\widehat{O}_2$ ile $\widehat{O}_4$ açılarının kolları birbirinin zıt ışınlarıdır.



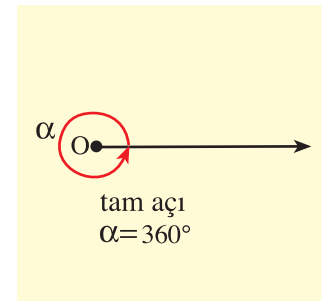
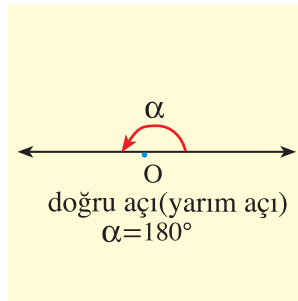
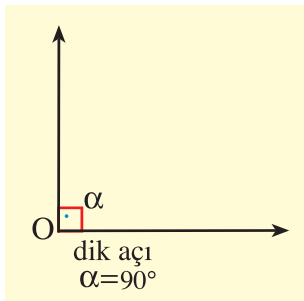
Başlangıç noktaları aynı, kolları birbirine göre zıt ışınlar olan açılara ters açılar denir.

Şekle göre; $\widehat{O}_1$ ile $\widehat{O}_3$, ters açılardır.
 $\widehat{O}_2$ ile $\widehat{O}_4$, ters açılardır.

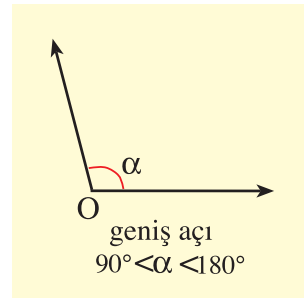
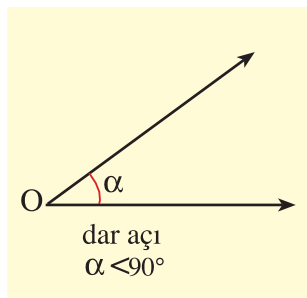
7. AÇI ÇEŞİTLERİ



Ölçüsü 90° olan açığa dik açı, ölçüsü 180° olan açığa doğru açı, ölçüsü 360° olan açığa tam açı denir.



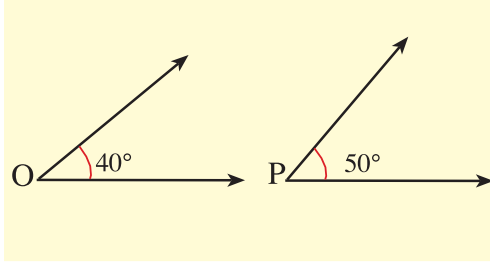
Ölçüsü 90° 'den küçük olan açığa dar açı, ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açığa geniş açı denir.



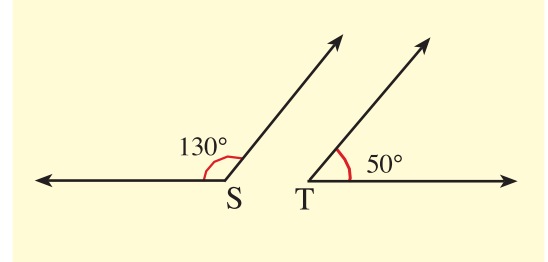
8. TÜMLER VE BÜTÜNLER AÇILAR



Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıya tümler açılar; ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya da bütünler açılar denir.



$m(\widehat{O}) + m(\widehat{P}) = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ dir.
 $\widehat{O}$ ile $\widehat{P}$ tümler açılardır.

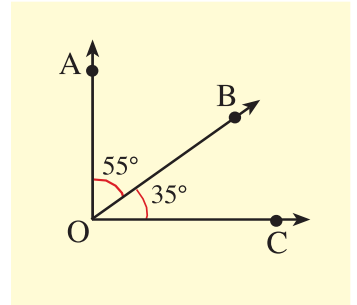


$m(\widehat{S}) + m(\widehat{T}) = 130^\circ + 50^\circ = 180^\circ$ dir.
 $\widehat{S}$ ile $\widehat{T}$ bütünler açılardır.



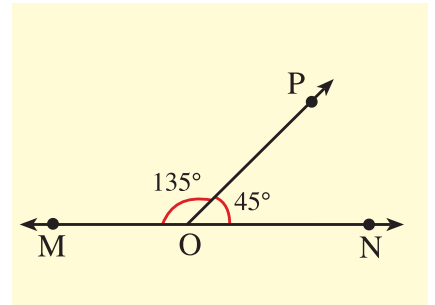
Ölçüleri toplamı 90° olan komşu iki açıya komşu tümler açılar denir.

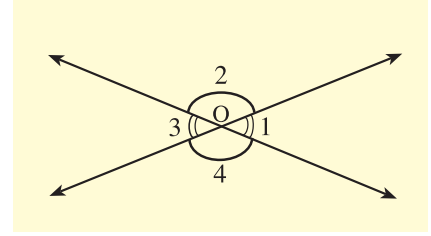
Yandaki şekilde; $\widehat{AOB}$ ile $\widehat{BOC}$ komşu açılar
ve $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$ dir.
O hâlde; $\widehat{AOB}$ ile $\widehat{BOC}$ komşu tümler iki açıdır.



Ölçüleri toplamı 180° olan komşu iki açıya komşu bütünler açılar denir.

Yandaki şekilde $\widehat{POM}$ ile $\widehat{PON}$ komşu açılar ve
 $m(\widehat{POM}) + m(\widehat{PON}) = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ dir.
O hâlde; $\widehat{POM}$ ile $\widehat{PON}$ komşu bütünler iki açıdır



Teorem 2.1: Ters açların ölçüleri eşittir.**Hipotez :** $\hat{O}_1$ ve $\hat{O}_3$ ters açlardır.**Hüküm :** $m(\hat{O}_1) = m(\hat{O}_3)$ dir.**İspat :** $m(\hat{O}_1) + m(\hat{O}_2) = 180^\circ$ (komşu bütünler açılar) ...(1) $m(\hat{O}_2) + m(\hat{O}_3) = 180^\circ$ (komşu bütünler açılar) ...(2)

(1) ve (2) eşitliklerinden,

$$m(\hat{O}_1) + m(\hat{O}_2) = m(\hat{O}_2) + m(\hat{O}_3) \text{ \& } m(\hat{O}_1) = m(\hat{O}_3)$$

bulunur. (Bir eşitliğin her iki tarafından aynı bir sayı çıkarılabilir)

Benzer yolla, $m(\hat{O}_2) = m(\hat{O}_4)$ olduğunu da siz gösteriniz.**ÖRNEKLER**1. $s(\widehat{ABC}) = 63^\circ$ dir. ABC açısının;

- tümleri olan açının ölçüsünü,
- bütünleri olan açının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

a. ABC açısının tümlerinin ölçüsüne x diyelim.

$$s(\widehat{ABC}) + x = 90^\circ \Rightarrow 63^\circ + x = 90^\circ$$

$$\Rightarrow x = 90^\circ - 63^\circ$$

$$\Rightarrow x = 27^\circ \text{ bulunur.}$$

b. ABC açısının bütünlerinin ölçüsüne y diyelim.

$$s(\widehat{ABC}) + y = 180^\circ \Rightarrow 63^\circ + y = 180^\circ$$

$$\Rightarrow y = 180^\circ - 63^\circ$$

$$\Rightarrow y = 117^\circ \text{ bulunur.}$$

2. Ölçüsü $58^\circ 21' 35''$ olan bir açının bütünlerinin ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM : $180^\circ = 179^\circ 59' 60''$ dir.

$$\begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' \\ 58^\circ 21' 35'' \\ - \\ \hline 121^\circ 38' 25'' \end{array} \text{ bulunur.}$$

3. Bir açının ölçüsü, tümlerinin ölçüsünün 5 katına eşittir. Bu açı kaç derecedir?

ÇÖZÜM

Açının tümlerinin ölçüsü x olsun.

Açının ölçüsü $5x$ olur.

$$5x + x = 90^\circ \Rightarrow 6x = 90^\circ$$

$$\Rightarrow x = 15^\circ \text{ (açının tümlerinin ölçüsü)}$$

$$5x = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ \text{ (açının ölçüsü) olur.}$$

4. Tümlerinin ölçüsü, bütünlerinin ölçüsünün $\frac{1}{4}$ ine eşit olan açı kaç derecedir?

ÇÖZÜM : Açının ölçüsüne x diyelim.

Açının;

tümlerinin ölçüsü : $90^\circ - x$

bütünlerinin ölçüsü : $180^\circ - x$ olur.

$$(90^\circ - x) = \frac{1}{4} (180^\circ - x)$$

$$4(90^\circ - x) = 180^\circ - x$$

$$360^\circ - 4x = 180^\circ - x$$

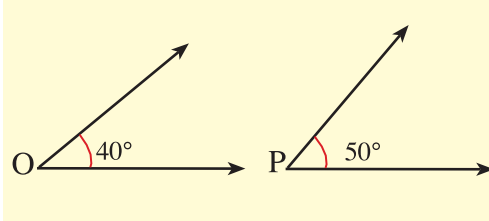
$$180^\circ = 3x$$

$$x = 60^\circ \text{ bulunur.}$$

9. AÇILARIN EŞLİĞİ



Ölçüleri eşit olan açılara eş açılar denir.



Yandaki açılarının ölçüleri eşittir.

$m(\widehat{P}) = 40^\circ$ ve $m(\widehat{S}) = 40^\circ$ dir. $\widehat{P}$ ile $\widehat{S}$ eş açılardır.

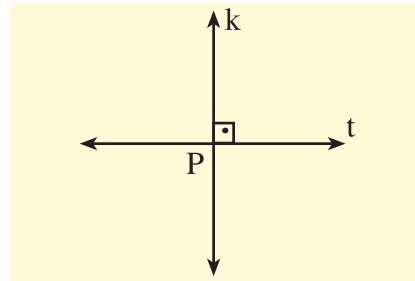
Bu açılarının eşliği, $\widehat{P} \cong \widehat{S}$ biçiminde gösterilir.

10. DOĞRULARIN DİKLİĞİ



Kesişen iki doğrunun oluşturduğu açılar dik açı ise, doğrulara dik doğrular denir.

k ve t doğrularının dikliğini
 $k \perp t$ biçiminde belirtiriz.

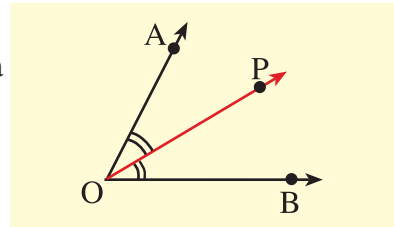


11. BİR AÇININ AÇIORTAYI



Açıyı eş iki açığa ayıran ışına açıortay denir.

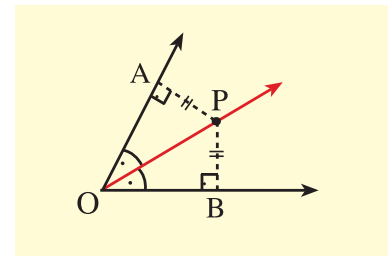
Yandaki şekilde $\widehat{AOP} \cong \widehat{BOP}$ veya
 $m(\widehat{AOP}) = m(\widehat{BOP})$ ise [OP, AOB
açısının açıortayıdır.



Teorem 2.2: Bir açının açıortayı üzerinde alınan herhangi bir nokta, açının kollarına eşit uzaklıktadır.

Hipotez : [OP açıortay ve $P \in [OP$ dir.

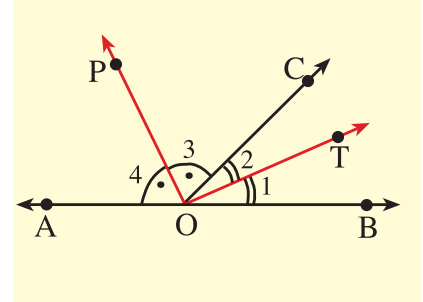
Hüküm : $|PA| = |PB|$ tir.



Teorem 2.3 : Komşu bütünler iki açının açıortayları birbirine diktir.

Hipotez : $\widehat{AOC}$ ile $\widehat{BOC}$ komşu iki açı,
[OP ve [OT sıra ile bu açıların
açıortaylarıdır.

Hüküm : $[OP \perp [OT$ dir.



İspat : $\widehat{O_1} \cong \widehat{O_2}$ ve $\widehat{O_3} \cong \widehat{O_4}$ veriliyor.

$$m(\widehat{O_1}) + m(\widehat{O_2}) + m(\widehat{O_3}) + m(\widehat{O_4}) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow m(\widehat{O_2}) + m(\widehat{O_2}) + m(\widehat{O_3}) + m(\widehat{O_3}) = 180^\circ$$

$$(m(\widehat{O_2}) = m(\widehat{O_1}) \text{ ve } m(\widehat{O_3}) = m(\widehat{O_4}))$$

$$\Rightarrow 2m(\widehat{O_2}) + 2m(\widehat{O_3}) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2 [m(\widehat{O_2}) + m(\widehat{O_3})] = 180^\circ$$

$$\Rightarrow m(\widehat{O_2}) + m(\widehat{O_3}) = 90^\circ \text{ olur.}$$

$m(\widehat{O_2})$ ve $m(\widehat{O_3})$ açıları komşu iki açıdır. O hâlde $[OT \perp [OP$ dir.

ÖRNEKLER

1. Şekilde d ve k doğruları O noktasında

kesişmektedir. $\widehat{O_1}$ ve $\widehat{O_3}$ açılarının
ölçülerini bulunuz.

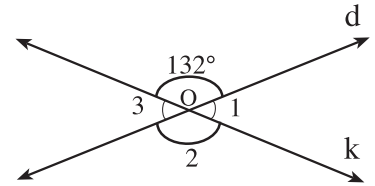
ÇÖZÜM

$$m(\widehat{O_1}) + 132^\circ = 180^\circ \text{ (komşu bütünler açılar)}$$

$$m(\widehat{O_1}) = 180^\circ - 132^\circ$$

$$m(\widehat{O_1}) = 48^\circ$$

$$m(\widehat{O_1}) = m(\widehat{O_3}) = 48^\circ \text{ (ters açılar) olur.}$$



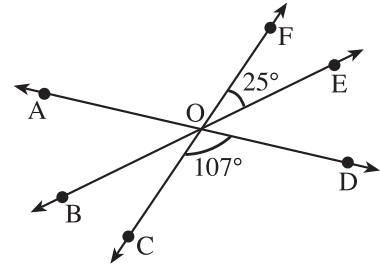
$m(\widehat{O_2}) = 132^\circ$ dir. Neden?

2. Yandaki şekilde AD, BE, CF doğruları O noktasında kesişiyor.

$$m(\widehat{FOE}) = 25^\circ \text{ ve } m(\widehat{COD}) = 107^\circ$$

olduğuna göre $m(\widehat{EOD})$, $m(\widehat{AOF})$,

$m(\widehat{AOB})$ ve $m(\widehat{BOC})$ kaç derecedir?



ÇÖZÜM

$$m(\widehat{FOE}) + m(\widehat{EOD}) + m(\widehat{COD}) = 180^\circ \quad (\widehat{FOC}, \text{ doğru açısı})$$

$$25^\circ + m(\widehat{EOD}) + 107^\circ = 180^\circ$$

$$m(\widehat{EOD}) + 132^\circ = 180^\circ$$

$$m(\widehat{EOD}) = 48^\circ$$

$$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{EOD}) = 48^\circ \text{ (ters açılar)}$$

$$m(\widehat{AOF}) = m(\widehat{COD}) = 107^\circ \text{ (ters açılar)}$$

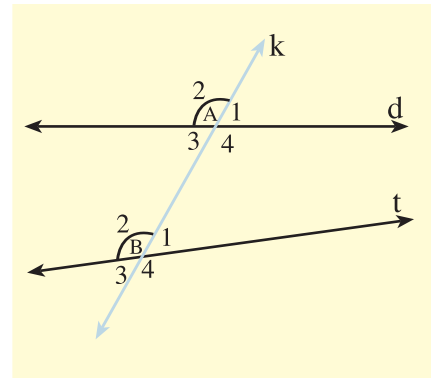
$$m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{FOE}) = 25^\circ \text{ (ters açılar)}$$

12. DÜZLEMDE BİR DOĞRUNUN İKİ DOĞRUYU KESMESİYLE OLUŞAN AÇILAR

d, t düzlemde herhangi iki doğru, k ise d ve t doğrularını sırasıyla A, B noktalarında kesen doğru olsun.

Oluşan açılardan:

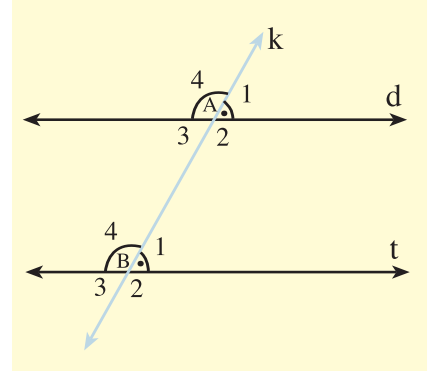
1. A_1 ile B_1 ,
 $\widehat{A_2}$ ile $\widehat{B_2}$,
 $\widehat{A_3}$ ile $\widehat{B_3}$,
 $\widehat{A_4}$ ile $\widehat{B_4}$ **yöndeş açılar**;
2. $\widehat{A_3}$ ile $\widehat{B_1}$,
 $\widehat{A_4}$ ile $\widehat{B_2}$, **iç ters açılar**;
3. $\widehat{A_1}$ ile $\widehat{B_3}$,
 $\widehat{A_2}$ ile $\widehat{B_4}$, **dış ters açılar** olarak adlandırılır.



Aksiyom 2.3 İki paralel doğru bir kesenle kesildiğinde oluşan yöndeş açılar eştir.

Açıklama : Şekilde d//t olsun. k, d ile t yi sırayla A ve B noktalarında kessin.

$$d//t \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 \cong \hat{B}_1, \hat{A}_2 \cong \hat{B}_2 \\ \hat{A}_3 \cong \hat{B}_3 \text{ ve } \hat{A}_4 \cong \hat{B}_4 \text{ tir.} \end{cases}$$



İki açının eş olmasının, ölçülerinin eşitliği ile tanımlandığını hatırlayınız.

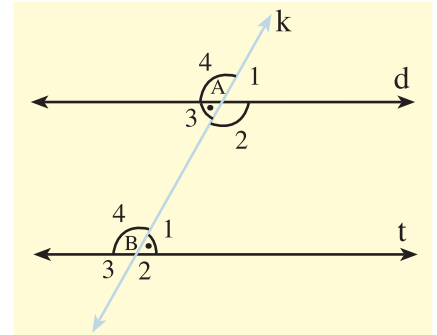
$$m(\hat{A}_1) = m(\hat{B}_1) \text{ ise } \hat{A}_1 \cong \hat{B}_1 \text{ tir.}$$

Teorem 2.a4 : İki paralel doğru bir kesenle kesildiğinde oluşan iç ters açılar eştir.

Hipotez : Şekle göre; d//t, $\hat{A}_2$ ile $\hat{B}_4$ ve $\hat{A}_3$ ile $\hat{B}_1$ iç ters açılardır.

Hüküm : $\hat{A}_2 \cong \hat{B}_4$ ve $\hat{A}_3 \cong \hat{B}_1$ tir.

İspat : $\hat{A}_1 \cong \hat{B}_1$ (yöndeş açılar) ve $\hat{A}_1 \cong \hat{A}_3$ (ters açılar) olduğundan $\hat{A}_3 \cong \hat{B}_1$ tir.



Araştırma

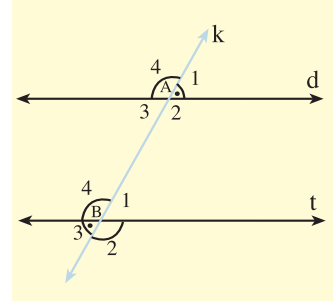
Benzer yolla $\hat{A}_2 \cong \hat{B}_4$ olduğunu da siz ispat ediniz.

Teorem 2.5 : İki paralel doğru bir kesenle kesildiğinde oluşan dış ters açılar eştir.

Hipotez : Şekle göre; $d//t$,

$\hat{A}_1$ ile $\hat{B}_3$ ve $\hat{A}_4$ ile $\hat{B}_2$
dış ters açılardır.

Hüküm : $\hat{A}_1 \cong \hat{B}_3$ ve $\hat{A}_4 \cong \hat{B}_2$ tir.

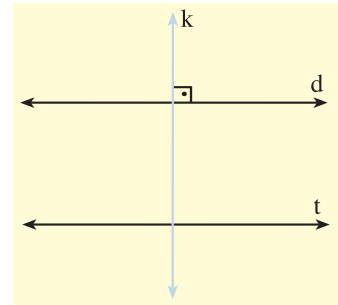


Sonuçlar : İki doğru bir kesenle kesildiğinde;
1. Yöndeş açılar eş ise, doğrular paraleldir.
2. İç ters açılar eş ise, doğrular paraleldir.
3. Dış ters açılar eş ise, doğrular paraleldir.

Teorem 2.6 : Paralel iki doğrudan birine dik olan doğru diğerine de diktir.

Hipotez : Şekle göre;
 $d//t$ ve $k \perp d$ dir.

Hüküm : $k \perp t$ dir.



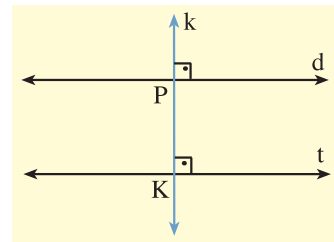
Araştırma

“Teorem 2.6” nın ispatını yapınız.

Teorem 2.7 : İki doğru üçüncü bir doğruya dik ise, birbirine paraleldir.

Hipotez : Şekle göre;
 $d \perp k$ ve $t \perp k$ dir.

Hüküm : $d//t$ dir.



ÖRNEKLER

1. Yandaki şekilde; $d_1 \parallel d_2$ ve $t_1 \parallel t_2$ dir.

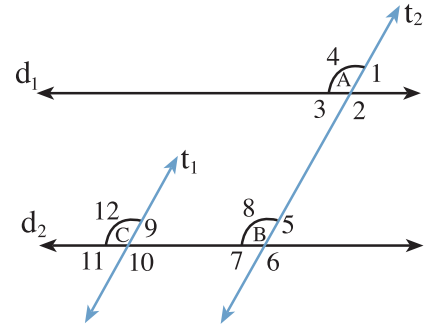
$$m(\widehat{A_1}) = m(\widehat{C_9}) \text{ midir?}$$

ÇÖZÜM

$$m(\widehat{A_1}) = m(\widehat{B_5}) \text{ (yöndeş açılar) ve}$$

$$m(\widehat{B_5}) = m(\widehat{C_9}) \text{ (yöndeş açılar)}$$

$$\text{olduğundan } m(\widehat{A_1}) = m(\widehat{C_9}) \text{ tir.}$$



2. Yandaki şekilde; $d \parallel [KB$, $t \parallel [KT$
ve $m(\widehat{K}) = 62^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{A_4})$
kaç derecedir?

ÇÖZÜM

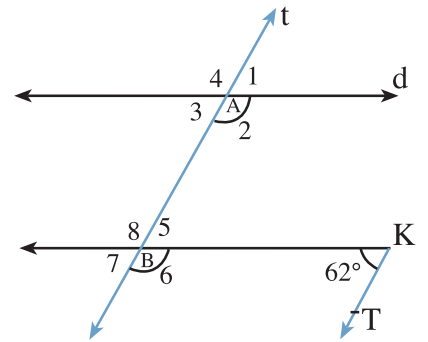
$$m(\widehat{B_5}) = m(\widehat{K}) = 62^\circ \text{ (iç ters açılar)}$$

$$m(\widehat{A_1}) = m(\widehat{B_5}) = 62^\circ \text{ (yöndeş açılar)}$$

$$m(\widehat{A_4}) + m(\widehat{A_1}) = 180^\circ \text{ (komşu bütünler açılar)}$$

$$m(\widehat{A_4}) + 62^\circ = 180^\circ$$

$$m(\widehat{A_4}) = 118^\circ \text{ olur.}$$



3. Yandaki şekilde; $AB \parallel [DE$ dir.

Şekilde verilen ölçülere göre

$$m(\widehat{CDE}) \text{ kaç derecedir?}$$

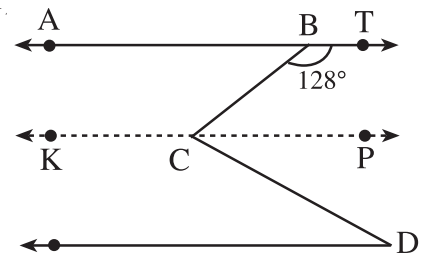
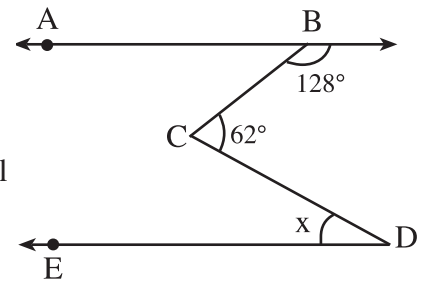
ÇÖZÜM : C noktasından AB doğrusuna paralel olan bir doğru çizelim.

$$m(\widehat{BCK}) = m(\widehat{TBC}) = 128^\circ \text{ (iç ters açılar)}$$

$$\begin{aligned} m(\widehat{BCP}) &= 180^\circ - m(\widehat{BCK}) \text{ (komşu bütünler açılar)} \\ &= 180^\circ - 128^\circ \\ &= 52^\circ \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(\widehat{DCP}) &= m(\widehat{BCD}) - m(\widehat{BCP}) \\ &= 62^\circ - 52^\circ = 10^\circ \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{DCP}) = 10^\circ \text{ (iç ters açılar) bulunur.}$$



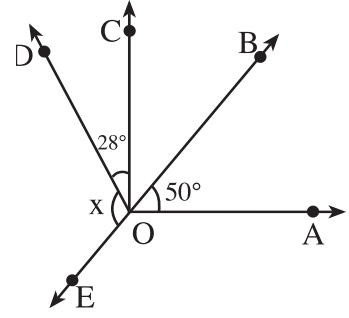
4. Yandaki şekilde; $[OA \perp [OC$,
 $m(\widehat{AOB}) = 50^\circ$ ve $m(\widehat{COD}) = 28^\circ$
 olduğuna göre $m(\widehat{DOE})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 90^\circ \quad (\text{tümlemler açıları})$$

$$50^\circ + m(\widehat{BOC}) = 90^\circ \quad \text{ve buradan,}$$

$$m(\widehat{BOC}) = 40^\circ \quad \text{bulunur.}$$



B, O ve E noktaları doğrusal noktalar olup, açı toplama aksiyomuna (Aksiyom 2.2'ye) göre;

$$m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOE}) = 180^\circ$$

$$40^\circ + 28^\circ + m(\widehat{DOE}) = 180^\circ$$

$$m(\widehat{DOE}) = 180^\circ - 68^\circ$$

$$m(\widehat{DOE}) = 112^\circ \quad \text{dir.}$$

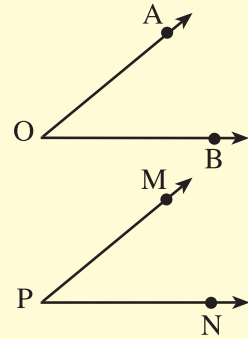
13. KENARLARI PARALEL AÇILAR

Kenarları paralel olan açılar bulundukları farklı konumları aşağıda inceleyelim:

1. Kenarları aynı yönde paralel olan açılar yandaki şekilde görüldüğü gibidir.

$$[OA \parallel [PM \quad (\text{aynı yönde paralel})$$

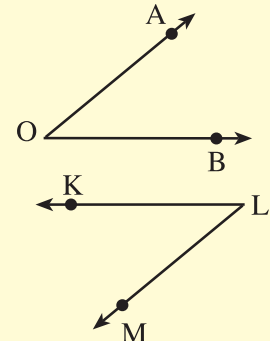
$$[OB \parallel [PN \quad (\text{aynı yönde paralel})$$



2. Kenarları zıt yönde paralel olan açılar yandaki şekilde görüldüğü gibidir.

$$[OA \parallel [LM \quad (\text{zıt yönde paralel})$$

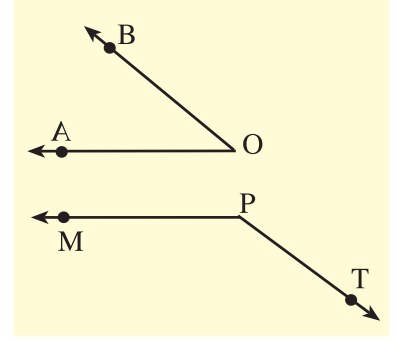
$$[OB \parallel [LK \quad (\text{zıt yönde paralel})$$



3. Birer kenarları aynı yönde, diğer kenarları ise zıt yönde paralel olan açılar yandaki şekilde görüldüğü gibidir.

$[OA \parallel [PM$ (aynı yönde paralel)

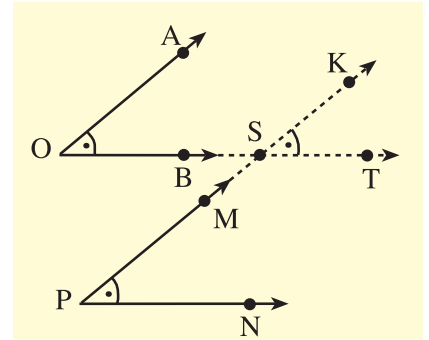
$[OB \parallel [PT$ (zıt yönde paralel)



Teorem 2.8 : Kenarları aynı yönde paralel olan açılarının ölçüleri eşittir.

Hipotez : $\widehat{AOB}$ ile $\widehat{MPN}$ açılarının;
kolları aynı yönde paraleldir.
($[OA \parallel [PM$ ve $[OB \parallel [PN$)

Hüküm : $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{MPN})$ dir.



İspat : $[OB$ ve $[PM$ ışınlarının uzantıları ile oluşan açıyı $\widehat{KST}$ olarak adlandıralım.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{KST} \cong \widehat{AOB} \text{ (yöndeş açılar)} \\ \widehat{KST} \cong \widehat{MPN} \text{ (yöndeş açılar)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AOB} \cong \widehat{MPN} \text{ dir.}$$

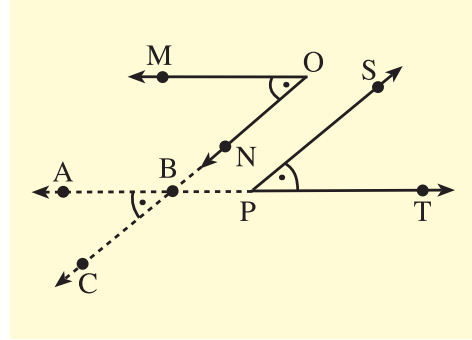
Eş açılarının ölçüleri eşit olacağından,

$$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{MPN}) \text{ dir.}$$

Teorem 2.9 : Kenarları zıt yönde paralel olan açılar ölçüleri eşittir.

Hipotez : $\widehat{MON}$ ve $\widehat{SPT}$ kenarları zıt yönde paralel olan iki açıdır.

Hüküm : $m(\widehat{MON}) = m(\widehat{SPT})$ dir.



Araştırma

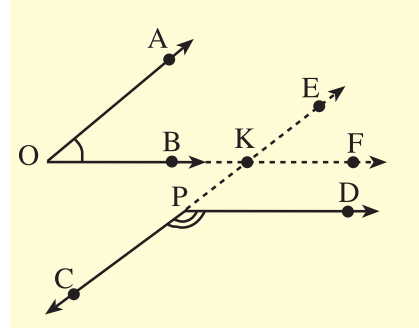
“Teorem 2.10” un ispatını yapınız.

Teorem 2.10 : Bir kenarları aynı yönde, diğer kenarları zıt yönde paralel olan açılar bütünlerdir.

Hipotez :

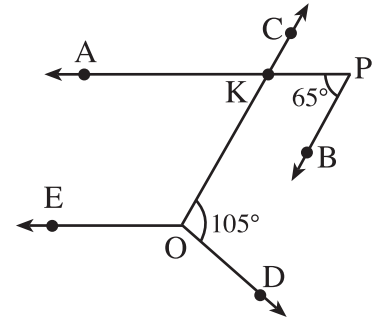
$\widehat{AOB}$ ve $\widehat{CPD}$ açılarının birer kenarları aynı yönde, diğer kenarları zıt yönde paraleldir.
($[OB \parallel [PD$ ve $[OA \parallel [PC$)

Hüküm : $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{CPD}) = 180^\circ$ dir.



ÖRNEKLER

1. Şekilde $[PA \parallel [OE$ ve $[PB \parallel [OC$ dir.
 $m(\widehat{COD}) = 105^\circ$ ve $m(\widehat{P}) = 65^\circ$ olduğuna
 göre $m(\widehat{DOE})$ kaç derecedir?



ÇÖZÜM

$$m(\widehat{COE}) + m(\widehat{P}) = 180^\circ \text{ (kenarları paralel açılar)}$$

$$m(\widehat{COE}) + 65^\circ = 180^\circ$$

$$m(\widehat{COE}) = 115^\circ \text{ olur.}$$

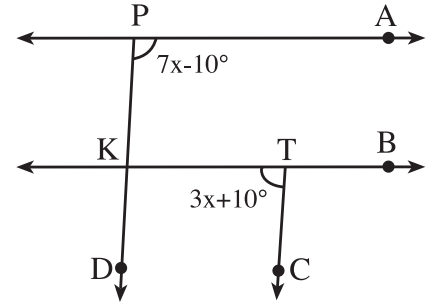
$$m(\widehat{COE}) + m(\widehat{COD}) + m(\widehat{EOD}) = 360^\circ \text{ (tam açı ve açı toplama aksiyomu)}$$

$$115^\circ + 105^\circ + m(\widehat{EOD}) = 360^\circ$$

$$m(\widehat{EOD}) = 360^\circ - 220^\circ$$

$$m(\widehat{EOD}) = 140^\circ \text{ dir.}$$

2. Şekilde, $AP \parallel BK$ ve $[PD \parallel [TC$ dir.
 $m(\widehat{APD}) = 7x - 10^\circ$ ve $m(\widehat{KTC}) = 3x + 10^\circ$
 olduğuna göre $m(\widehat{KTC})$ kaç derecedir?



ÇÖZÜM

$$m(\widehat{APD}) + m(\widehat{KTC}) = 180^\circ \text{ (birer kolları aynı yönde,}$$

$$\text{diğer kolları zıt yönde paralel olan açılar)}$$

$$7x - 10^\circ + 3x + 10^\circ = 180^\circ$$

$$10x = 180^\circ$$

$$x = 18^\circ$$

$$m(\widehat{KTC}) = 3x + 10^\circ$$

$$= 3 \cdot 18^\circ + 10^\circ$$

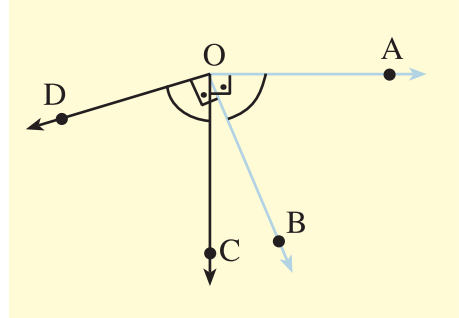
$$= 54^\circ + 10^\circ$$

$$= 64^\circ \text{ dir.}$$

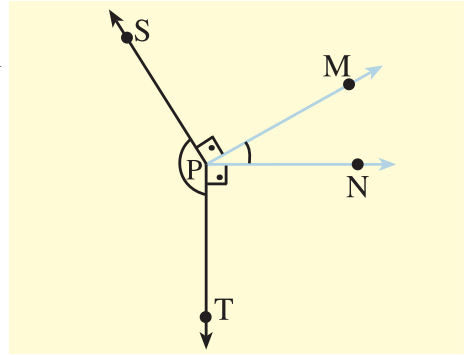
14. KENARLARI DİK AÇILAR

Kenarları dik olan açıların bulundukları farklı konumları aşağıda inceleyelim:

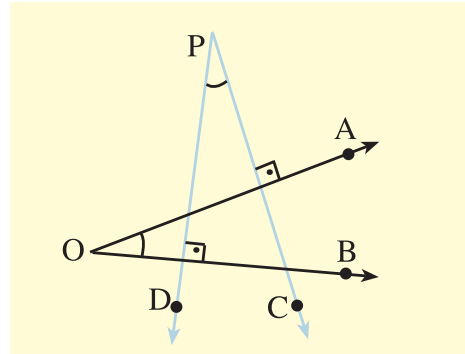
1. Yandaki şekilde, $\angle AOB$ açısının kenarları $\angle COD$ açısının kenarlarına diktir. Yani;
 $[OA \perp [OC$ ve $[OB \perp [OD$ dir.
 Bu konumda açılarının köşeleri ortaktır.



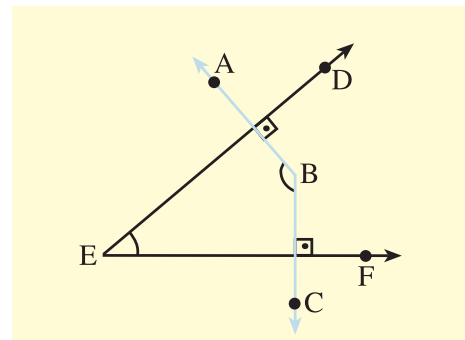
2. Yandaki şekilde, $\angle SPT$ açısının kenarları $\angle MPN$ açısının kenarlarına diktir. Yani;
 $[PS \perp [PM$ ve $[PT \perp [PN$ dir.
 Bu konumda açılarının köşeleri ortaktır.



3. Yandaki şekilde, $\angle AOB$ açısının kenarları $\angle CPD$ açısının kenarlarına diktir. Yani;
 $[PC \perp [OA$ ve $[PD \perp [OB$ dir.
 Bu konumda açılardan birini köşesi, diğerinin dış bölgesindedir.



4. Yandaki şekilde, $\angle ABC$ açısının kenarları $\angle DEF$ açısının kenarlarına diktir. Yani;
 $[BA \perp [ED$ ve $[BC \perp [EF$ dir.
 Bu konumda açılardan birinin köşesi, diğerinin bir iç noktasıdır.



Teorem 2.11 : Kenarları dik olan iki açı;

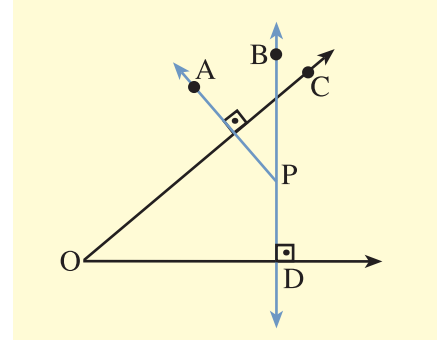
a. Dar açı ise eşitir.

b. Biri dar açı, diğeri geniş açı ise, bütünler açılardır.

Hipotez : $[OC \perp [PA$ ve $BP \perp [OD$

Hüküm : a. $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{COD})$

b. $m(\widehat{COD}) + m(\widehat{APD}) = 180^\circ$ dir.



İspat

a. $[PE \parallel [OC$ ve $[PF \parallel [OD$ olacak şekilde $[PE$ ve $[PF$ ışınlarını çizelim.

$$m(\widehat{O}) = m(\widehat{P_4})$$

(kenarları aynı yönde paralel açılar)

$[PA \perp [OC \Rightarrow [PA \perp [PE$ (Teorem 2.7)

Buradan, $m(\widehat{P_1}) + m(\widehat{P_5}) = 90^\circ$ olur. (1)

$BP \perp [OD \Rightarrow [BP \perp [PF$ (Teorem 2.7)

Buradan, $m(\widehat{P_4}) + m(\widehat{P_5}) = 90^\circ$ olur. (2)

(1) ve (2) eşitliklerinden, $m(\widehat{P_1}) = m(\widehat{P_4})$ olur. ... (3)

Diğer taraftan $m(\widehat{O}) = m(\widehat{P_4})$... (4) olduğu biliniyor.

(3) ve (4) eşitliklerinden,

$$m(\widehat{P_1}) = m(\widehat{O}) \quad \text{ya da} \quad m(\widehat{APB}) = m(\widehat{COD})$$

bulunur.

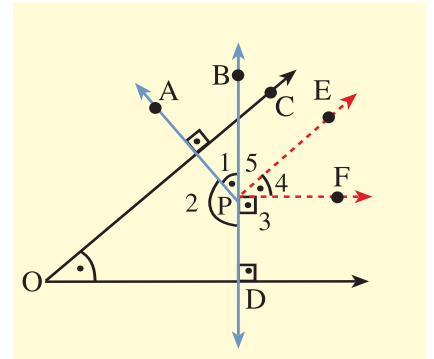
b. $m(\widehat{P_1}) + m(\widehat{P_2}) = 180^\circ$ (bütünler açılar). ... (5)

$$m(\widehat{P_1}) = m(\widehat{O}) \quad (\text{a da ispatlandı}). \quad \dots (6)$$

(5) ve (6) dan,

$$m(\widehat{O}) + m(\widehat{P_2}) = 180^\circ \text{ yani,}$$

$$m(\widehat{COD}) + m(\widehat{APD}) = 180^\circ \text{ bulunur.}$$



ÖRNEKLER

1. Yandaki şekilde;

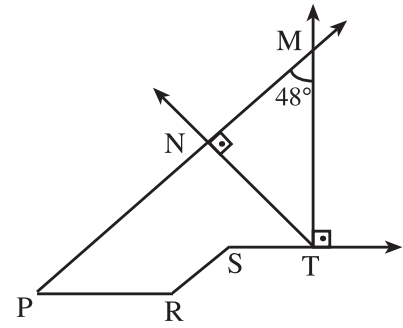
$[PR] \parallel [ST]$,

$[PM] \parallel [RS]$,

$[TN] \perp [PM]$,

$[TM] \perp [ST]$ ve

$m(\widehat{PMT}) = 48^\circ$ ise $m(\widehat{P})$ kaç derecedir?



ÇÖZÜM

Şekildeki gibi, $[ST]$ nın S yönündeki uzantısı, $[PM]$ nı K noktasında kessin.

$\widehat{MKT}$ ile $\widehat{MTN}$ açıları, kenarları dik olan iki açı olduğundan,

$$m(\widehat{MKT}) = m(\widehat{MTN}) \dots (1)$$

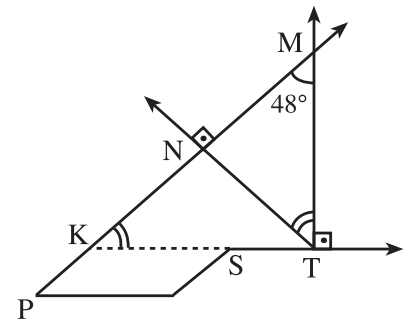
$$m(\widehat{MKT}) = m(\widehat{P}) \quad (\text{yöndeş açılar}) \dots (2) \text{ dir.}$$

(1) ve (2) eşitliklerinden,

$$m(\widehat{P}) = m(\widehat{MTN}) \text{ olur.}$$

$$m(\widehat{MTN}) = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ \text{ ve}$$

$$m(\widehat{P}) = 42^\circ \text{ bulunur.}$$

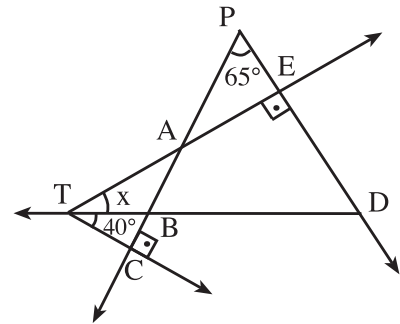


2. Yandaki şekilde;

$[TE] \perp [PD]$ ve $[TC] \perp [PC]$ dir.

$m(\widehat{P}) = 65^\circ$ ve $m(\widehat{CTD}) = 40^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{ATB}) = x$ kaç derecedir?



ÇÖZÜM

$$m(\widehat{ATC}) = m(\widehat{P}) \quad (\text{kenarları dik açılar})$$

$$m(\widehat{ATB}) + m(\widehat{BTC}) = m(\widehat{P}) \quad (\text{açı toplama aksiyomu})$$

$$x + 40^\circ = 65^\circ$$

$$x = 25^\circ \text{ ve}$$

$$m(\widehat{ATB}) = 25^\circ \text{ bulunur.}$$



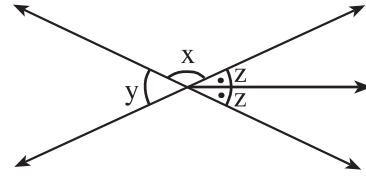
KONUNUN ÖZETİ

- Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşim kümesine **açı** denir. Işınlardan ortak noktası açının köşesini oluşturur.
- Bir açı, saat ibresinin hareket yönünde yönlendirilmişse **negatif yönlü açı**, saat ibresinin hareket yönünün tersi yönünde yönlendirilmişse **pozitif yönlü açı** adını alır.
- $\widehat{AOB}$ sembolik ifadesine göre; [OA ışını, açının başlangıç kenarı, [OB açının bitim kenarı, O noktası da açının köşesidir.
- Bir açı, üzerinde olduğu düzlemi farklı üç nokta kümesine ayırır. Bunlar; açının iç bölgesini, açının kendisini ve açının dış bölgesini oluşturan noktalar kümesidir.
- Birer kenarı ortak, ancak hiçbir iç noktaları ortak olmayan iki açıya komşu açılar denir.
- Köşeleri aynı, kenarları birbirine göre zıt ışınlar olan iki açıya ters açılar denir. Ters açılarının ölçüleri eşittir. Açı ölçüsü birimi derecedir. Derece, bir çember yayının 360 eş parçasından birinin uç noktalarından geçen merkez açı olarak tanımlanır.
- Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıya tümler açılar, ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya da bütünler açılar adı verilir.
- Hem komşu hem de tümler olan açılara komşu tümler açılar, hem komşu hem de bütünler olan açılara da komşu bütünler açılar denir.
- Ters açılarının ölçüleri eşittir.
- İki doğrunun kesişmesiyle oluşan açılar dik açı ise, doğrulara dik doğrular adı verilir.
- Ölçüleri eşit olan açılara eş açılar adı verilir.
- Açıortay, bir açıyı iki eş açıya ayıran ışının adıdır.
- Bir açının açıortayı üzerindeki noktalar, açının kollarına eşit uzaklıktadır.
- Paralel iki doğrunun, üçüncü bir doğruyla kesiştirilmesiyle oluşan açılardan;
 - a. Yöndeş açılar eşittir.
 - b. İçters açılar eşittir.
 - c. Dışters açılar eşittir.
- Paralel iki doğrudan birine dik olan doğru, diğerine de diktir.

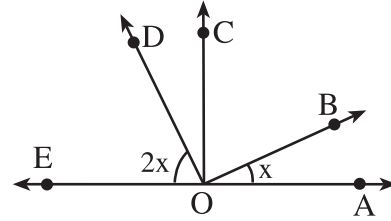
- Aynı bir doğruya dik olan doğrular birbirine paraleldir.
- Kenarları aynı yönde veya zıt yönde birbirine paralel olan açılar ölçüleri birbirine eşittir.
- Birer kenarları aynı yönde, diğer kenarları zıt yönde birbirine paralel olan açılar bütünlerdir.
- Kenarları birbirine dik olan iki açı, dar açı ise, birbirine eşit; biri dar açı, diğeri geniş açı ise bütünlerdir.

ARAŞTIRMALAR

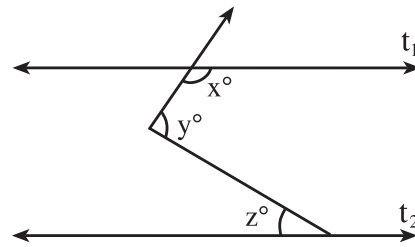
1. Yandaki şekilde $y + z = 90^\circ$ olduğuna göre x kaç derecedir?



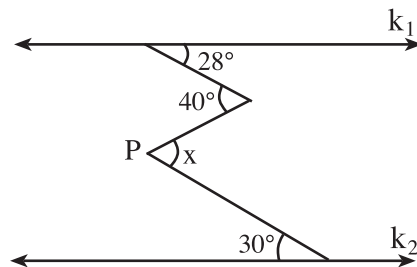
2. Yandaki şekilde $[OA \perp [OC$ ve $[OB \perp [OD$ dir. $m(\widehat{AOB}) = x$, $m(\widehat{DOE}) = 2x$ ise $m(\widehat{BOC})$ kaç derecedir?



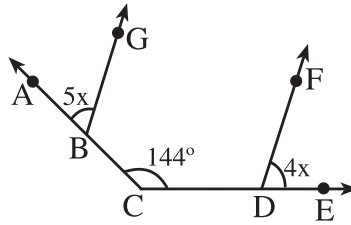
3. Yandaki şekilde $t_1 \parallel t_2$ dir. x° , y° ve z° açı ölçümleri olduğuna göre $x + y - z$ değeri kaçtır?



4. Yandaki şekilde $k_1 \parallel k_2$ dir. Verilen ölçümlere göre $m(\widehat{P}) = x$ kaç derecedir?



5. Ölçüsü, bütünleyeninin ölçüsünün 3 katına eşit olan açı kaç derecedir?
6. Tümler iki açının ölçülerinin oranı $\frac{2}{7}$ dir. Büyük açının ölçüsü kaç derecedir?
7. Tümler iki açıdan birinin ölçüsü diğerinin ölçüsünün 4 katından 10° eksiktir. Buna göre büyük açı kaç derecedir?
8. Aşağıdaki şekilde $[BG \parallel [DF$ $m(\widehat{ABG}) = 5x$, $m(\widehat{EDF}) = 4x$ ve $m(\widehat{ACE}) = 144^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{CDF})$ kaç derecedir?





ÜNİTE II DEĞERLENDİRME SORULARI

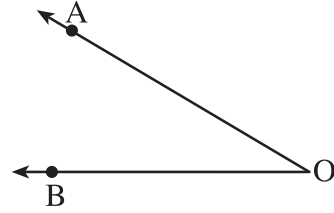
1. Aşağıdakilerden hangisi yandaki AOB açısını **belirtmez**?

A) $\widehat{BOA}$

B) $[OA \cup [OB$

C) $\widehat{O}$

D) $[OA \cap [OB$



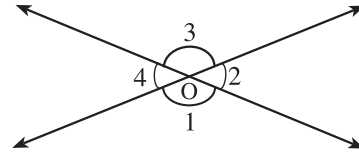
2. Yandaki şekle göre, hangi seçenekte verilen iki açı, komşu açı çifti **değildir**?

A) $\widehat{O}_1$ ile $\widehat{O}_2$

B) $\widehat{O}_1$ ile $\widehat{O}_3$

C) $\widehat{O}_2$ ile $\widehat{O}_3$

D) $\widehat{O}_4$ ile $\widehat{O}_1$



3. Aşağıdaki ölçüleri verilen açılardan hangisi geniş açıdır?

A) 45°

B) 89°

C) 123°

D) 185°

4. Ölçüsü $75^\circ 18' 23''$ olan açının bütünlerinin ölçüsü hangisidir?

A) $75^\circ 41' 37''$

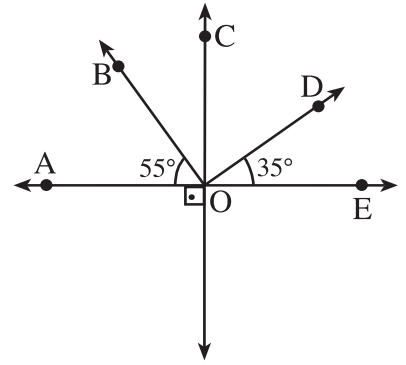
B) $103^\circ 41' 27''$

C) $104^\circ 40' 37''$

D) $104^\circ 41' 37''$

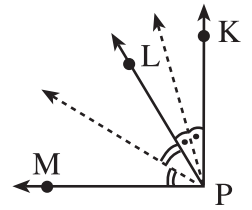
5. Yandaki şekilde verilenlere göre hangi açılar tümler değildir?

- A) $\widehat{AOB}$ ile $\widehat{BOC}$
 B) $\widehat{EOD}$ ile $\widehat{DOC}$
 C) $\widehat{BOC}$ ile $\widehat{COD}$
 D) $\widehat{DOE}$ ile $\widehat{BOC}$



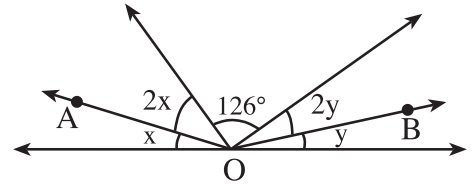
6. Şekilde $[PK \perp [PM$ dir. $\widehat{KPL}$ ile $\widehat{MPL}$ açılarının açışortaylarının oluşturacağı açının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 35
 B) 45
 C) 50
 D) 60



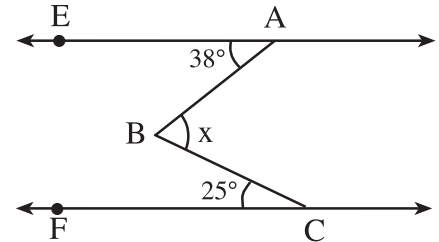
7. Yandaki şekilde x ve y açı ölçülerini göstermektedir. Verilenlere göre şekilde $m(\widehat{AOB})$ kaç derecedir?

- A) 150
 B) 160
 C) 162
 D) 170



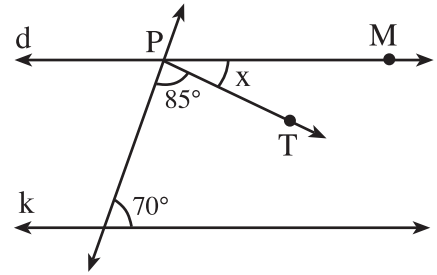
8. Yandaki şekilde $AE \parallel CF$ dir. Şekil üzerindeki verilenlere göre $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

- A) 63
 B) 60
 C) 58
 D) 13



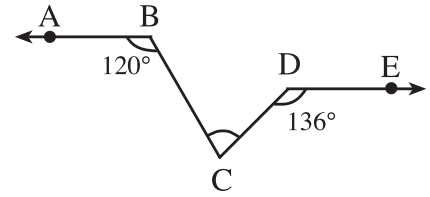
9. Yandaki şekilde $d \parallel k$ dır. Şekil üzerindeki verilene göre $m(\widehat{MPT})$ kaç derecedir?

- A) 35
B) 30
C) 25
D) 20



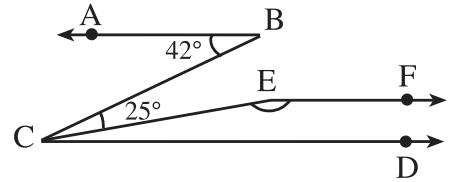
10. Yandaki şekilde, $[BA \parallel [DE$ dir. Şekil üzerindeki verilene göre $m(\widehat{BCD})$ kaç derecedir?

- A) 74
B) 76
C) 82
D) 86



11. Yandaki şekilde, $[BA \parallel [EF \parallel [CD$ dir. Şekil üzerinde verilen açı ölçümlerine göre $m(\widehat{CEF})$ kaç derecedir?

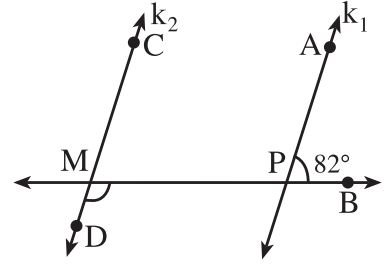
- A) 113
B) 127
C) 135
D) 163



12. Yandaki şekilde $k_1 \parallel k_2$ dir.

$m(\widehat{APB}) = 82^\circ$ olduğuna göre
 $m(\widehat{BMD})$ kaç derecedir?

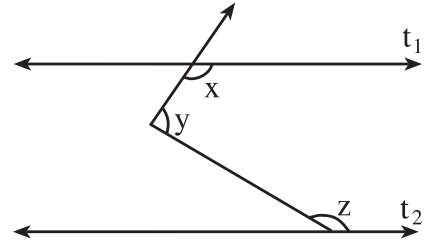
- A) 108
 B) 98
 C) 95
 D) 92



13. Yandaki şekilde $t_1 \parallel t_2$ dir.

x , y ve z açı ölçüleri olduğuna
 göre $x + y + z$ değeri hangisidir?

- A) 360°
 B) 270°
 C) 240°
 D) 180°



14. Bütünleyeninin ölçüsü, kendi ölçüsünün
 4 katına eşit olan açı kaç derecedir?

- A) 18
 B) 36
 C) 48
 D) 56

15. Ölçüsü, tümleyeninin ölçüsünün $\frac{1}{5}$ ine
 eşit olan açı kaç derecedir?

- A) 15
 B) 30
 C) 60
 D) 75